Autoevaluación

Página 199

1 a) Calcula la distancia del punto $A(1, 0, 0)$ al plano que pasa por $P(1, -1, -2)$ y es paralelo al plano π: $x + 2y + 3z + 6 = 0$.

b) Halla el punto simétrico de A respecto del plano π.

c) ¿Qué ángulo forma la recta que pasa por A y P con π?

a) π': $x + 2y + 3z + k = 0$

$P \in \pi' \to 1 - 2 - 6 + k = 0 \to k = 7 \to \pi'$: $x + 2y + 3z + 7 = 0$

$$dist\,(A, \pi') = \frac{|1+7|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{4}{7}\sqrt{2}\sqrt{7} \text{ u}$$

b) $A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de π.

r: recta perpendicular a π que pasa por A.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$M = r \cap \pi \to (1 + \lambda) + 2(2\lambda) + 3(3\lambda) + 6 = 0 \to \lambda = -\frac{1}{2}$$

$M\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right)$

$A'(x, y, z)$: simétrico de A respecto de M.

$$\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right) \to x = 0,\ y = -2,\ z = -3 \to A' = (0, -2, -3)$$

c) $\overrightarrow{AP} = (1, -1, -2) - (1, 0, 0) = (0, -1, -2)$

$\vec{d}\,(0, -1, -2)$

$$sen\ \widehat{(s, \pi)} = \frac{|(0, -1, -2) \cdot (1, 2, 3)|}{\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{35}}\sqrt{2} \to \widehat{(s, \pi)} = arc\ sen\ \frac{3}{\sqrt{35}}\sqrt{2}$$

2 a) Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $P(5, 1, 3)$ y $Q(3, 7, -1)$.

b) Comprueba que el plano que obtienes, π, es perpendicular al segmento PQ en su punto medio.

c) El plano π corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Calcula el área del triángulo ABC.

d) Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y O (origen de coordenadas).

a) $A(x, y, z)$: punto genérico.

$dist\,(A, P) = dist\,(A, Q)$

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2}$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59$$

$$x^2 - 10x + y^2 - 2y + z^2 - 6z + 35 = (x^2 - 6x + y^2 - 14y + z^2 + 2z + 59) = 0$$

$$-4x + 12y - 8z - 24 = 0$$

Es un plano:

$$\pi: -x + 3y - 2z - 6 = 0$$

b) $\overrightarrow{n_\pi}(-1, 3, -2)$

$\overrightarrow{PQ} = (3, 7, -1) - (5, 1, 3) = (-2, 6, -4) = 2(-1, 3, -2) \rightarrow \overrightarrow{PQ} \,//\, \overrightarrow{n_\pi} \rightarrow \pi \perp \overrightarrow{PQ}$

$M = \left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}, \frac{2}{2}\right) = (4, 4, 1)$

Sustituimos las coordenadas de M en π:

$-4 + 12 - 2 - 6 = 0 \rightarrow M \in \pi$

Luego π es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

c) $A(-6, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, -3)$

$\overrightarrow{AB}(6, 2, 0)$

$\overrightarrow{AC}(6, 0, -3)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|(6, 2, 0) \times (6, 0, -3)| = \frac{1}{2}|(-6, 18, -12)| = \frac{6}{2}|(-1, 3, -2)| = 3\sqrt{1+9+4} = 3\sqrt{14}\ \text{u}^2$$

d) $\overrightarrow{OA}(-6, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB}(0, 2, 0)$, $\overrightarrow{OC}(0, 0, -3)$

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\ \text{u}^3$$

3 **Determina el punto simétrico del punto $A(-3, 1, 6)$ respecto de la recta r de ecuación:**

$$x - 1 = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Buscamos un punto M de la recta de manera que el vector $\overrightarrow{AM}$ sea perpendicular al vector dirección de r.

Un punto de r es de la forma $(1, -3, -1) + \lambda(1, 2, 2) = (1 + \lambda, -3 + 2\lambda, -1 + 2\lambda)$.

$\overrightarrow{AM}(4 + \lambda, -4 + 2\lambda, -7 + 2\lambda)$

El vector dirección de la recta es $(1, 2, 2)$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{d_r} = 4 + \lambda - 8 + 4\lambda - 14 + 4\lambda = -18 + 9\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$

El punto M es $(3, 1, 3)$.

Buscamos un punto $A'(\alpha, \beta, \gamma)$ simétrico de A respecto de M:

$A' = M + \overrightarrow{AM} = (3, 1, 3) + (6, 0, -3) = (9, 1, 0)$

4 **Considera la recta y el plano siguientes:**

$$r: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} \qquad \pi: 3x + 4y - 6 = 0$$

a) Comprueba que son paralelos y calcula $dist(r, \pi)$.

b) Halla las ecuaciones de dos rectas distintas que estén contenidas en π y que sean paralelas a r y calcula la distancia entre ellas.

a) $r: \begin{cases} \overrightarrow{d_r}(-4, 3, 1) \\ P_r(1, 2, 3) \end{cases}$

$\pi: 3x + 4y - 6 = 0$

$\overrightarrow{d_r}(-4, 3, 1)$, $\overrightarrow{n_\pi}(3, 4, 0)$

$\overrightarrow{d_r} \cdot \overrightarrow{n_\pi} = 0 \rightarrow \overrightarrow{d_r} \perp \overrightarrow{n_\pi} \rightarrow r \,//\, \pi$

$$dist(r, \pi) = dist(P_r, \pi) = \left|\frac{3+8-6}{5}\right| = 1\ \text{u}$$

b) Tomamos dos puntos de π distintos, P y P'.

$$s: \begin{cases} \vec{d_s} = \vec{d_r} = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 1) \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} \vec{d_t} = \vec{d_r} = (-4, 3, 1) \\ P(2, 0, 2) \end{cases}$$

$$dist\,(s, t) = dist\,(P, t) = \frac{|\overrightarrow{PP'} \times \vec{d_r}|}{|\vec{d_r}|} = \frac{|(0, 0, 1) \times (-4, 3, 1)|}{\sqrt{16 + 9 + 1}} = \frac{|(-3, -4, 0)|}{\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ u}$$

5 **Dadas las rectas** $r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$**:**

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a r **y a** s**.**

b) Calcula la distancia entre r **y** s**.**

a) $\vec{d_r}(2, -1, 1)$; $\vec{d_s} = (2, -1, 1) \times (1, 0, 3) = (-3, -5, 1)$

Por tanto, si llamamos t a la recta que buscamos:

$$\vec{d_t} = (2, -1, 1) \times (-3, -5, 1) = (4, -5, -13)$$

Plano α que contiene a t y a r:

$$\left.\begin{array}{l} P(3, 5, 4) \\ \vec{d_r}(2, -1, 1) \\ \vec{d_t}(4, -5, -13) \end{array}\right\} \to \alpha: \begin{vmatrix} x - 3 & 2 & 4 \\ y - 5 & -1 & -5 \\ z - 4 & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \to \alpha: 3x + 5y - z - 30 = 0$$

Plano β que contiene a t y a s:

Hallamos primero un punto de s haciendo $x = 0$ en las ecuaciones de s:

$$\left.\begin{array}{l} -y + z + 4 = 0 \\ 3z = 0 \end{array}\right\} \to \begin{cases} z = 0 \\ y = 4 \end{cases} \to Q(0, 4, 0)$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} Q(0, 4, 0) \\ \vec{d_s}(-3, -5, 1) \\ \vec{d_t}(4, -5, -13) \end{array}\right\} \to \beta: \begin{vmatrix} x & -3 & 4 \\ y - 4 & -5 & -5 \\ z & 1 & -13 \end{vmatrix} = 0 \to \beta: 2x - y + z + 4 = 0$$

La recta t es:

$$t: \begin{cases} 3x + 5y - z - 30 = 0 \\ 2x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Expresamos la recta s en ecuaciones paramétricas para que sea fácil tomar un punto, P, y un vector director, $\vec{d_s}$, de dicha recta. Hacemos $z = \lambda$ y despejamos:

$$s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad P(0, 4, 0) \in s \qquad \vec{d_s}(-3, -5, 1)$$

Q y $\vec{d_r}$ son, respectivamente, un punto y un vector director de la recta r:

$$Q(3, 5, 4) \in r; \ \vec{d_r}(2, -1, 1)$$