Continuidad en $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden. La función no es continua en $x = 3$.

Derivabilidad en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^x = 1 = f'(0^-) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 = f'(0^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 3$:

Como $f(x)$ no es continua en $x = 3$, $f(x)$ no es derivable en $x = 3$.

b) Si $x \neq -1$ y $x \neq 2$, $f(x)$ es continua y derivable.

Continuidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x + 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\}$$ $f(x)$ es continua en $x = -1$.

Continuidad en $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (2x + 2) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (-x^2 + 8x) = 12 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$$ Los límites por la derecha y por la izquierda no coinciden, $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Derivabilidad en $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + 2) = 0 = f'(2^-) \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -1} 2 = 2 = f'(2^+) \end{array}\right\}$$ Las derivadas laterales existen pero no coinciden, $f(x)$ no es derivable en $x = -1$.

Derivabilidad en $x = 2$:

$f(x)$ no es continua en $x = 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x = 2$.

Página 265

41 Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Continuidad:

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\rightarrow$ Es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$ Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x = 1) \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) \to$$ La función es continua en $x = 1$ y, por tanto,es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$ $\to$ La función es derivable. Su derivada es, en esos puntos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$f'(0^-) = 0 = f'(0^+)$. Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$; y $f'(0) = 0$.

- En $x = 1$:

$f'(1^-) = 2 \neq f'(1^+) = 1$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Continuidad:

- En $x \neq 0$ $\to$ La función es continua, pues está formada por dos funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} e^{-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \to$$ La función es continua en $x = 0$ y, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$ $\to$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$f'(0^-) = -1 = f'(0^+)$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = -1$. La función es derivable en todo $\mathbb{R}$. Su derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

42 **a) Calcula m y n para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

a) Para que sea derivable, en primer lugar ha de ser continua.

- Si $x \neq 1$, la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 5x + m) = -4 + m \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2 + nx) = -1 + n \\ f(1) = -4 + m \end{array}\right\}$$

Para que sea continua en $x = 1$, ha de ser $-4 + m = -1 + n$; es decir: $m = n + 3$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 1$, la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = -3 \\ f'(1^+) = -2 + n \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable en $x = 1$, ha de ser $-3 = -2 + n$, es decir, $n = -1$.

Por tanto, la función será derivable en todo $\mathbb{R}$ si $m = 2$ y $n = -1$. En este caso, la derivada sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

b) $f'(x) = 2x - 5$ si $x < 1$

$$2x - 5 = 0 \ \to\ x = \frac{5}{2};\ \text{pero } \frac{5}{2} > 1$$

$f'(x) = -2x - 1$ si $x \ge 1$

$$-2x - 1 = 0 \ \to\ x = -\frac{1}{2};\ \text{pero } -\frac{1}{2} < 1$$

Por tanto, $f'(x)$ no se anula en ningún punto.

43 **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si $x \neq 2 \to$ la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 2$ debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$; es decir, $2a + 3 = -b$ o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 2 \to$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- En $x = 2$ debe cumplirse que $f'(2^-) = f'(2^+)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser $4a + 3 = 4 - b$; es decir, $b = -4a + 1$.

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \to 2a = 4 \to a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.

44 **Calcula a y b para que f sea continua y derivable.**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- En $x \neq 0 \to$ La función es continua pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^3 - x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ f(0) = 0 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua ha de ser $b = 0$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0 \to$ La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = a \end{array}\right\}$$

Para que sea derivable, ha de ser $a = -1$.

Por tanto, $f(x)$ será continua y derivable si $a = -1$ y $b = 0$.

45 **Di si es derivable cada una de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Si es derivable, calcula su valor y, en caso contrario, di cuánto valen las derivadas laterales.**

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x<2 \\ x^2-x+3 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **en** $x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 1 \\ 2x-2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **en** $x_0 = 1$

c) $f(x) = |x|$ **en** $x_0 = 0$

d) $f(x) = |x^2-x-6|$ **en** $x_0 = -2$ **y** $x_1 = 3$

a) Estudiamos primero la continuidad en $x_0 = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x-1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2-x+3) = 5 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 5 \ \to \ \text{Es continua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x<2 \ \to \ f'(2^-) = 3 \\ 2x-1 & \text{si } x>2 \ \to \ f'(2^+) = 3 \end{cases}$$

$f'(2^-) = f'(2^+) = 3 \ \to$ Es derivable en $x_0 = 2$ y $f'(2) = 3$.

b) Estudiamos primero la continuidad en $x_0 = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2-1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x-2) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 0 \ \to \ \text{Es continua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \ \to \ f'(1^-) = 2 \\ 2 & \text{si } x>1 \ \to \ f'(1^+) = 2 \end{cases}$$

$f'(1^-) = f'(1^+) = 2 \ \to$ Es derivable en $x_0 = 1$ y $f'(1) = 2$.

c) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

Estudiamos primero la continuidad en $x_0 = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0 \ \to \ \text{Es continua.}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \ \to \ f'(0^-) = -1 \\ 1 & \text{si } x>0 \ \to \ f'(0^+) = 1 \end{cases}$$

$f'(0^-) \ne f'(0^+) \ \to$ No es derivable en $x_0 = 0$.

d) $f(x) = \begin{cases} x^2-x-6 & \text{si } x<-2 \\ -x^2+x+6 & \text{si } -2 \le x<3 \\ x^2-x-6 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

La función es continua en $\mathbb{R}$ por ser el valor absoluto de una función polinómica.

Calculamos las derivadas laterales en cada punto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x<-2 \\ -2x+1 & \text{si } -2<x<3 \\ 2x-1 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -5 \\ f'(-2^+) = 5 \end{array}\right\} \to f'(-2^-) \ne f'(-2^+) \ \to \ \text{No es derivable en } x_0 = -2.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -5 \\ f'(3^+) = 5 \end{array}\right\} \to f'(3^-) \ne f'(3^+) \ \to \ \text{No es derivable en } x_1 = 3.$$