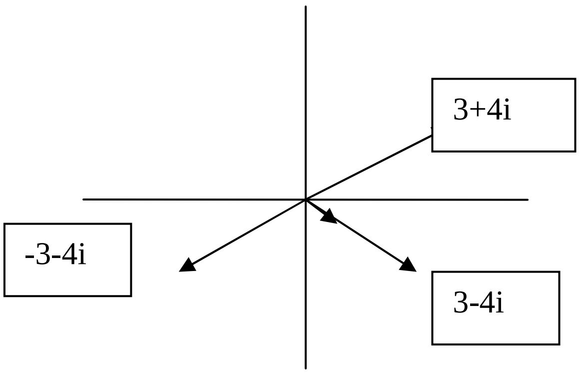
EJERCICIOS NÚMEROS COMPLEJOS

1) Representa gráficamente $-z$, $\bar{z}$ y $\dfrac{1}{z}$ para:

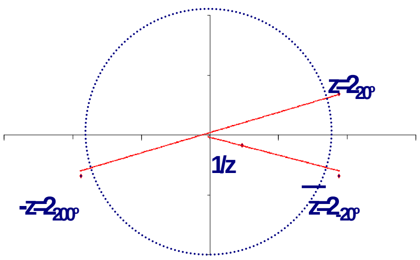
a) $z = 3 + 4 \cdot i$

b) $z = 2_{20^\circ}$

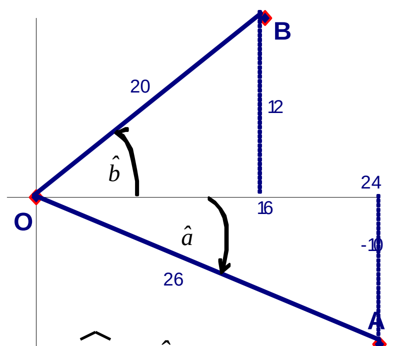
(a) **-z=-3-4i** $\quad \bar{z} = 3 - 4i \quad \dfrac{1}{z} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25} \cdot i$



(b) $\bar{z} = 2_{-20^\circ} \quad -z = 2_{20^\circ+180^\circ} = 2_{200^\circ} \quad \frac{1}{z} = \left(\frac{1}{2}\right)_{-20^\circ}$



2) Halla las razones trigonométricas del ángulo AOB, sabiendo que A es el afijo del complejo $\varepsilon = 24 - 10 \cdot i$ y B el afijo del complejo $\sigma = 16 + 12 \cdot i$



$\widehat{AOB} = \hat{b} - \hat{a}$

$$|\,\varepsilon\,| = |\,24 - 10i\,| = \sqrt{24^2 + (-10)^2} = 26; \;\; \hat{a} = \arg(24 - 10i) \Rightarrow \begin{cases} sen\,\hat{a} = -\frac{5}{13} \\ \cos\hat{a} = \frac{12}{13} \\ tg\,\hat{a} = -\frac{5}{12} \end{cases}$$

$$|\sigma|=|16+12i|=\sqrt{16^2+12^2}=20;\quad \hat{b}=\arg(16+12i)\Rightarrow\begin{cases} sen\,\hat{b}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}\\ \cos\hat{b}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}\\ tg\,\hat{a}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\end{cases}$$

$$sen\,(\hat{b}-\hat{a})=sen\,\hat{b}\cdot cos\,\hat{a}-cos\,\hat{b}\cdot sen\,\hat{a}=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{-5}{13}=\frac{56}{65}$$

$$cos\,(\hat{b}-\hat{a})=cos\,\hat{b}\cdot cos\,\hat{a}-sen\,\hat{b}\cdot sen\,\hat{a}=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{-5}{13}=\frac{33}{65}$$

$$tg\,(\hat{b}-\hat{a})=\frac{sen(\hat{b}-\hat{a})}{cos(\hat{b}-\hat{a})}=\frac{56}{33}$$

....

Otra forma:

$$\overline{AB}=|\sigma-\varepsilon|=|(16+12i)-(24-10i)|=|-8+22i|=\sqrt{(-8)^2+22^2}=\sqrt{548}$$

Por el teorema del coseno: $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot cos(A\hat{O}B)$

$548=676+400-2\cdot 26\cdot 20\cdot cos(A\hat{O}B)\Rightarrow \cos(A\hat{O}B)=\frac{528}{1040}=\frac{33}{65}$

$$sen(A\hat{O}B)=+\sqrt{1-cos^2(A\hat{O}B)}=\sqrt{1-\left(\frac{33}{65}\right)^2}=\sqrt{\frac{4225-1089}{4225}}=\sqrt{\frac{3136}{4225}}=\frac{56}{65}$$

3) Calcula:

a) $\sqrt{4+3\cdot i}$

$|z|=5;\alpha=36{,}87^{o}$

$\sqrt{5_{36{,}87^{o}}}=\sqrt{5}_{\frac{36{,}87^{o}+360\cdot k}{2}}$

Dos soluciones (números complejos opuestos):

k=0: $\sqrt{5}_{18{,}435^{o}}=1{,}79+i\cdot 1{,}342$

k=1: $\sqrt{5}_{198{,}435^{o}}=-1{,}79-i\cdot 1{,}342$

b) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\cdot i}=\sqrt[4]{16_{120^{o}}}=2_{\frac{120^{o}+360\cdot k}{4}}=\begin{cases}k=0:2_{30^{o}}\\ k=1:2_{120^{o}}\\ k=2:2_{210^{o}}\\ k=3:2_{300^{o}}\end{cases}$

c) $\sqrt[3]{\frac{-2+2\cdot i}{1+\sqrt{3}\cdot i}}=\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}_{135^{o}}}{2_{60^{o}}}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}_{75^{o}}}=\sqrt[6]{2}_{\frac{75^{o}+k\cdot 360}{3}}=\begin{cases}k=0:\sqrt[6]{2}_{25^{o}}\\ k=1:\sqrt[6]{2}_{145^{o}}\\ k=2:\sqrt[6]{2}_{265^{o}}\end{cases}$

4) Representa gráficamente z, z^2, z^3, z^4, z^5 y z^6 en los siguientes casos:

a) $z = \sqrt{2} \cdot i = \sqrt{2}_{90^\circ}$ $\quad z^2 = 2_{180^\circ}$; $z^3 = 2\sqrt{2}_{270^\circ}$; $z^4 = 4_{0^\circ}$; $z^5 = 4\sqrt{2}_{90^\circ}$; $z^6 = 8_{180^\circ}$

b) $z = -3 = 3_{180^\circ}$ $\quad z^2 = 9_{0^\circ}$; $z^3 = 27_{180^\circ}$; $z^4 = 81_{0^\circ}$; $z^5 = 243_{180^\circ}$; $z^6 = 729_{0^\circ}$

c) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i = 1_{45^\circ}$ $\quad z^2 = 1_{90^\circ}$; $z^3 = 1_{135^\circ}$; $z^4 = 1_{180^\circ}$; $z^5 = 1_{225^\circ}$; $z^6 = 1_{270^\circ}$

d) $z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i = \frac{\sqrt{2}}{2}_{225^\circ}$ $\quad z^2 = \frac{1}{2}_{90^\circ}$; $z^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}_{315^\circ}$; $z^4 = \frac{1}{4}_{180^\circ}$; $z^5 = \frac{\sqrt{2}}{8}_{45^\circ}$; $z^6 = \frac{1}{8}_{270^\circ}$

5) Calcula $\sqrt[5]{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right)}$. Halla el perímetro y el área del pentágono regular formado por los afijos obtenidos.

$$|z| = 1; \alpha = 60^\circ \qquad \sqrt[5]{1_{60^\circ}} = \sqrt[5]{1}_{\frac{60^\circ + k \cdot 360^\circ}{5}} = \begin{cases} k = 0 : 1_{12^\circ} \\ k = 1 : 1_{84^\circ} \\ k = 2 : 1_{156^\circ} \\ k = 3 : 1_{228^\circ} \\ k = 4 : 1_{300^\circ} \end{cases}$$

Cálculo del lado:

$a^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(84 - 12) = 1{,}382;\ \ a = 1{,}1756$

Perímetro = 5,878 unidades de longitud

Área:

$1 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $b = 0{,}809$

$$A = 5 \cdot \frac{0{,}809 \cdot 1{,}1756}{2} = 2{,}378\, unidades\ \ área$$

6) Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 + 1 = 0$

$x = \sqrt[6]{-1}$ $\qquad$ $x = \sqrt[6]{1_{180^\circ}}$

$\sqrt[6]{1} = 1$

$$\alpha = \frac{180^o + 360^o k}{6} \begin{cases} k = 0 & \alpha_1 = 30^o & x_1 = 1_{30^\circ} \\ k = 1 & \alpha_2 = 90^o & x_2 = 1_{90^\circ} \\ k = 2 & \alpha_3 = 150^o & x_3 = 1_{150^\circ} \\ k = 3 & \alpha_4 = 210^o & x_4 = 1_{210^\circ} \\ k = 4 & \alpha_5 = 270^o & x_5 = 1_{270^\circ} \\ k = 5 & \alpha_6 = 330^o & x_6 = 1_{330^\circ} \end{cases}$$

b) $x^6 + 64 = 0$

$x^6 = -64 = 64_{180^\circ}$

$$x = \sqrt[6]{64_{180^\circ}} = 2_{\frac{180^\circ + k\cdot 360^\circ}{6}} = \begin{cases} k = 0 : 2_{30^\circ} \\ k = 1 : 2_{90^\circ} \\ k = 2 : 2_{150^\circ} \\ k = 3 : 2_{210^\circ} \\ k = 4 : 2_{270^\circ} \\ k = 5 : 2_{330^\circ} \end{cases}$$

7) Calcula $w = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5$ sabiendo que $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

$|z| = \sqrt{(-1/2)^2 + (-\sqrt{3}/2)^2} = 1$, *arg(z)= -60º*

$\frac{1}{z} = 1_{60^\circ} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \;=\; \bar{z} = 1_{-60^\circ}$

$$\left.\begin{array}{l} z^2 = 1_{-120^\circ} = 1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ z^3 = 1_{-180^\circ} = 1_{240^\circ} = -1 \\ z^4 = 1_{-240^\circ} = 1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = -z \\ z^5 = z^3 \cdot z^2 = -1 \cdot z^2 = -z^2 \end{array}\right\} \boldsymbol{w} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 1 + z + z^2 - 1 - z - z^2 = \boldsymbol{0}$$

8) Resuelve la ecuación $\left(\frac{z+1}{z}\right)^4 = 1$

Llamamos $w = \frac{z+1}{z}$; *las soluciones de la ecuación* $w^4 = 1$ *son:* $\begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = i \\ w_3 = -1 \\ w_4 = -i \end{cases}$

Como $w = \frac{z+1}{z}$, *despejando z*, obtenemos $z = \frac{1}{w-1}$ *si* $w \neq 1$ *(ver ejercicio anterior).*

La ecuación dada tiene tres soluciones: $\begin{cases} z_1 = \frac{1}{w_2-1} = \frac{1}{i-1} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \\ z_2 = \frac{1}{w_3-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2} \\ z_3 = \frac{1}{w_4-1} = \frac{1}{-i-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{cases}$

Nota:

$$\frac{z+1}{z} = \frac{(z+1)\cdot\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{z\cdot\bar{z}+\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = 1 + \frac{1}{z}$$

$$1 + \frac{1}{z} = a + bi \Leftrightarrow \frac{1}{z} = (a-1) + bi,$$

si $\boldsymbol{a+bi \neq 1+0i}$, $\frac{1}{z} \neq 0 \Rightarrow \exists\, \boldsymbol{z} = \frac{1}{(a-1)+bi} = \frac{(a-1)-bi}{(a-1)^2+b^2} = \boldsymbol{\frac{a-1}{(a-1)^2+b^2} - \frac{b}{(a-1)^2+b^2}\,i}$

Para a+bi = 1 la ecuación dada no tiene solución.

9) Resuelve el sistema: $\begin{cases} 3z + w = 6i \\ z + wi = 1 - i \end{cases}$

$$\begin{cases} 3z + w = 6i \\ z + wi = 1 - i \end{cases} \begin{cases} w = 6i - 3z \\ z + (6i - 3z)\,i = 1 - i \end{cases} \begin{cases} w = 6i - 3z \\ z - 6 - 3i\,z = 1 - i \end{cases} \begin{cases} w = 6i - 3z \\ (1-3i)z = 7 - i \end{cases} \begin{cases} w = 6i - 3z = 6i - 3(1+2i) = -3 \\ z = \frac{7-i}{1-3i} = \frac{10+20i}{10} = 1 + 2i \end{cases}$$

Solución: $\boldsymbol{z = 1+2i,\ \ w = -3}$

10) Halla el valor de k para que $w = \frac{(k+3i)\cdot(1+i)^3}{\left(\sqrt{3}+i\right)^6}$ sea un número real.

$$1 + i = \left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ} \Rightarrow (1+i)^3 = \left(2\sqrt{2}\right)_{135^\circ} = 2\sqrt{2}\left(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ\right) = -2 + 2i$$

$$\sqrt{3} + i = 2_{30^\circ} \Rightarrow \left(\sqrt{3}+i\right)^6 = \left(2^6\right)_{180^\circ} = -64$$

$$w = \frac{(k+3i)(1+i)^3}{\left(\sqrt{3}+i\right)^6} = \frac{(k+3i)(-2+2i)}{-64} = \frac{(-2k-6)+(-6+2k)i}{-64} = \frac{k+3}{32} + \frac{3-k}{32}\,i \in \Re \Leftrightarrow \boldsymbol{k = 3}$$

11) En un triángulo isósceles ZOX se verifica ZO = ZX = 13cm. y OX = 0,24m. W es un punto situado en la prolongación de ZO y dista 13 cm. de O.

a) Halla la longitud del segmento WX utilizando fórmulas trigonométricas.

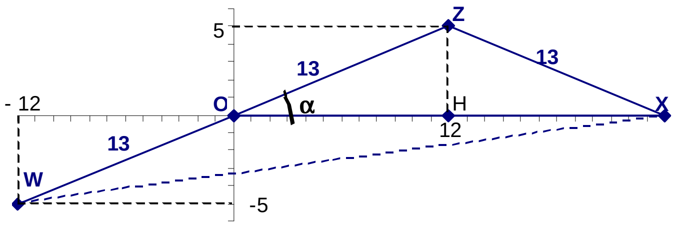
b) Si O es (0, 0) y X es el afijo de 24_{0°, halla dos complejos z y w cuyos afijos se correspondan con los puntos Z y W. Realiza la representación gráfica.

c) Calcula el complejo x-w. Relaciona el resultado del apartado a) con el módulo de x-w.

a) $\overline{WX}^2 = \overline{OW}^2 + \overline{OX}^2 - 2\cdot\overline{OW}\cdot\overline{OX}\cdot\cos(180^\circ - \alpha)$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -12/13$

$\overline{WX} = \sqrt{13^2 + 24^2 - 2\cdot 13\cdot 24\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)} = \sqrt{1321}\ cm$



b) $\overline{ZH} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\ cm$

z=12+5i; w=-12-5i; x=24+0i

c) $\overline{WX} = |x - w| = |24 - (-12 - 5i)| = |36 - 5i| =$

$= \sqrt{36^2 + (-5)^2} = \sqrt{1321}\ cm$; $x - w = 36 - 5i$

La longitud del lado WX es el módulo del complejo $x - w$.

12) Halla dos números complejos sabiendo que suman 3+ i, que la parte real del primero es 2 y que el cociente entre el primero y el segundo es imaginario puro.

$$\begin{array}{l} z = a + bi \\ w = c + di \\ \hline z+w=(a+c)+(b+d)i \end{array}$$

$Re(z)=2 \Rightarrow a=2$

$z+w=3+i \Rightarrow \begin{cases} a+c=3 \\ b+d=1 \end{cases}$ *Basta resolver el sistema:* $\begin{cases} a=2 \\ a+c=3 \\ b+d=1 \\ ac+bd=0 \end{cases}$

$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

$\frac{z}{w} = 0 + ki \Rightarrow ac+bd=0$

$\begin{cases} a=2 \\ c=1 \\ d=1-b \\ 2\cdot 1 + b(1-b) = 0 \Rightarrow b^2 - b - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = 2 \end{cases} \end{cases}$; *existen dos soluciones:* $\begin{cases} \boldsymbol{z_1 = 2 - i \quad y \quad w_1 = 1 + 2i} \\ \boldsymbol{z_2 = 2 + 2i \quad y \quad w_2 = 1 - i} \end{cases}$

13) Resuelve la ecuación: $(z^4+4)\cdot(z^2-3-4\cdot i)=0$

$$(z^4+4)\cdot(z^2-3-4i)=0. \Rightarrow \begin{cases} z^4+4=0 \Leftrightarrow z^4=-4 \Leftrightarrow z^4=4_\pi \Leftrightarrow z=\left(\sqrt[4]{4}\right)_{\frac{\pi+k\cdot 2\pi}{3}},\ k=0,1,2,3 \\ \text{ó} \\ z^2-3-4i=0 \Leftrightarrow z^2=3+4i \end{cases}$$

La ecuación $z^4=1_\pi$ *tiene 4 soluciones:*

$$\begin{cases} z_1=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=1+i \\ z_2=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}\cdot 1_{\frac{\pi}{4}}=(1+i)\cdot i=-1+i \\ z_3=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}+\pi}=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}\cdot 1_\pi=(1+i)\cdot(-1)=-1-i \\ z_3=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}\cdot 1_{\frac{3\pi}{4}}=(1+i)\cdot(-i)=1-i \end{cases}$$

La ecuación $z^2=3+4i$ *tiene dos soluciones:*

Llamamos x+yi=z;

$$(x+yi)^2=3+4i \Leftrightarrow x^2+2xyi-y^2=3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=4 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ x^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=3 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ x^2-\frac{4}{x^2}=3 \end{cases} \begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ x^4-4=3x^2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ x^4-3x^2-4=0 \Rightarrow x^2=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} \cancel{x^2=-1} \\ x^2=4 \left\langle \begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{array}\right. \end{array}\right. \end{cases}\right\rangle \text{para} \begin{cases} x_1=-2\ ,\ y_1=-1 \\ x_2=2\ ,\ y_2=1 \end{cases}$$

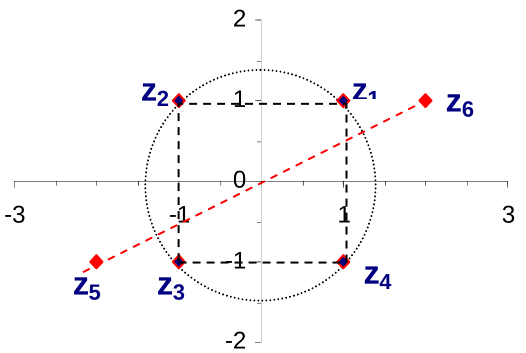
Las soluciones son: $z_5=-2-i$ *y* $z_6=2+i$

La ecuación $(z^4+4)\cdot(z^2-3-4i)=0$ ***tiene pues seis soluciones:***

$z_1=1+i$, $z_2=-1+i$, $z_3=-1-i$, $z_4=1-i$, $z_5=-2-i$ *y* $z_6=2+i$

Los afijos de z_1, z_2, z_3 *y* z_4 *son los vértices de un cuadrado inscrito en la circunferencia de centro el origen de coordenados y radio* $\sqrt{2}$.

Como z_5 *y* z_6 *son opuestos, sus afijos son simétricos respecto al origen de coordenadas.*



14) Expresa en forma binómica el resultado de: $\dfrac{5\cdot(1+i)\cdot(\cos 61^{\circ}+i\cdot sen61^{\circ})\cdot(\cos 32^{\circ}+i\cdot sen32^{\circ})}{\sqrt{2}\cdot(\cos 48^{\circ}+i\cdot sen48^{\circ})}$

$$\frac{5\cdot(1+i)\cdot(cos61^o+isen61^o)\cdot(cos32^o+isen32^o)}{\sqrt{2}\cdot(cos48^o+isen48^o)}=\frac{5_{0^o}\cdot 2_{45^o}\cdot 1_{61^o}\cdot 1_{32^o}}{\left(\sqrt{2}\right)_{48^o}}=\left(\frac{5\cdot 2\cdot 1\cdot 1}{\sqrt{2}}\right)_{0^o+45^o+61^o+32^o-48^o}=\left(5\sqrt{2}\right)_{90^o}=$$
$$=\boldsymbol{5\sqrt{2}\,i}$$

15) Resuelve la ecuación: $(z^3+1)\cdot(i\cdot z^2+(1+i)\cdot z+1)=0$

$$\boldsymbol{(z^3+1)\cdot(iz^2+(1+i)z+1)=0}\Rightarrow\begin{cases} z^3+1=0\Leftrightarrow z^3=-1\Leftrightarrow z^3=1_{180^o}\Leftrightarrow z=\left(\sqrt[3]{1}\right)_{\frac{180^o+k\cdot 360}{3}},\ k=0,1,2\\ \quad ó \\ iz^2+(1+i)z+1=0\Leftrightarrow z=\dfrac{-(1+i)\pm\sqrt{(1+i)^2-4i}}{2i}=\dfrac{-(1+i)\pm\sqrt{-2i}}{2i}\end{cases}$$

La ecuación $z^3=1_{180^o}$ *tiene tres soluciones:* $\begin{cases} z_1=1_{60^o}=1(cos60^o+i\,sen\,60^o)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ z_2=1_{180^o}=-1\\ z_3=1_{300^o}=1(cos300^o+i\,sen300^o)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{cases}$

La ecuación $iz^2+(1+i)z+1=0$ *tiene dos soluciones:*

$-2i=2_{270^o}$ *tiene dos raíces cuadradas , opuestas:*

$$\left(\sqrt{2}\right)_{\frac{270^o+k\cdot 360}{2}},k=0,1\ \begin{cases}\left(\sqrt{2}\right)_{135^o}=\sqrt{2}(cos135^o+isen135^o)=-1+i\\ \left(\sqrt{2}\right)_{315^o}=\sqrt{2}(cos315^o+isen315^o)=1-i\end{cases}\Bigg\rangle\pm(-1+i)$$

Por tanto las soluciones son:

$$z=\frac{-(1+i)\pm\sqrt{2i}}{2i}=\frac{-(1+i)\pm(-1+i)}{2i}\quad\begin{cases} z_4=\dfrac{-(1+i)-(-1+i)}{2i}=\dfrac{-2i}{2i}=-1\\ z_5=\dfrac{-(1+i)+(-1+i)}{2i}=\dfrac{-2}{2i}=-\dfrac{1}{i}=i\end{cases}$$

16) Sabiendo que $|z|=5$, calcula el valor de k si $z=(1+i+i^2+i^3+...+i^{22})\cdot(3+k\cdot i)$

$1+i+i^2+i^3+ ... +i^{22}$ *es la suma de los 23 primeros términos de la progresión geométrica* ***$1, i, i^2, ...$*** *de razón* ***i***

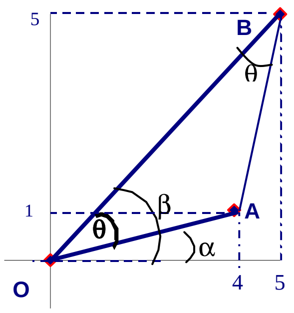
$$\boldsymbol{1+i+i^2+i^3+...+i^{22}}=\frac{1-i^{22}\cdot i}{1-i}=\frac{1-(-1)\cdot i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{1-2i-1}{2}=i$$

$z=i\cdot(3+ki)=-k+3i;\quad |z|=\sqrt{k^2+9}=5\Leftrightarrow k^2+9=25\Leftrightarrow k^2=16\Leftrightarrow \boldsymbol{k=4}$ ***ó*** $\boldsymbol{k=-4}$

17) Comprueba, hallando sus lados y los cosenos de sus ángulos, que el triángulo formado por el origen de coordenadas y los afijos de $z = 4 + i$ y $w = 5 + 5i$:

a) Es isósceles.

b) Es obtusángulo.



$\overline{OA} = |a| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$; $\overline{OB} = |b| = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

$\overline{AB} = |b - a| = |1 + 4i| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

Es isósceles por ser $\overline{OA} = \overline{AB}$,

Como $\overline{OB}^2 = 50 > \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = 17 + 17$, **el triángulo es obtusángulo.**

Por el teorema del coseno:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{AB}^2}{2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB}}$$

$$\cos\theta = \frac{17 + 50 - 17}{2 \cdot \sqrt{17} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{50}{10\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{50}$$

$$\cos\hat{A} = \frac{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{OB}^2}{2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AB}} = \frac{17 + 17 - 50}{2 \cdot \sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} = \frac{-16}{2 \cdot 17} = -\frac{8}{17}$$ *(por ser negativo nos confirma que $\hat{A}$ es obtuso)*

También se puede calcular:

$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{5}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos\hat{A} = \cos(180^{\circ} - 2\theta) = -\cos 2\theta = -(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 1 - 2\cos^2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{25}{34} = -\frac{8}{17}$

18) Calcula el área del triángulo del ejercicio anterior utilizando la fórmula de Herón: $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, donde s es el semiperímetro y a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo.

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{17} + \sqrt{50}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{50}}{2} \cdot \frac{\sqrt{50}}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{17} - \sqrt{50}}{2}\right)}$$

$$A = \frac{\sqrt{50}}{4} \cdot \sqrt{4 \cdot 17 - 50} = \frac{30}{4} = 7{,}5$$

A = 7,5 unidades de área