Autoevaluación

Página 118

1 **Dada la matriz** $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$:

a) Halla los valores de m para que los vectores fila de M sean linealmente independientes.

b) Estudia el rango de M según los valores de m.

c) Para $m = 1$, calcula la inversa de M.

a) Para que los vectores fila de M sean linealmente independientes, $ran\,(M)$ tiene que valer 3.

Para que $ran\,(M) = 3 \rightarrow |M| \neq 0$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 + m = 0 \rightarrow m = -1,\ m = 0$$

Los vectores fila de M son linealmente independientes si $m \neq -1$ y $m \neq 0$.

b) Si $m \neq -1$ y $m \neq 0 \rightarrow ran\,(M) = 3$.

Si $m = -1 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Tomamos el menor formado por las dos primeras columnas y la primera y tercera filas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(M) = 2$$

Si $m = 0 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Tomamos el menor formado por las dos primeras columnas y las dos primeras filas.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(M) = 2$$

c) Si $m = 1 \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = 2 \rightarrow M^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

2 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, **obtén todas las matrices B que conmutan con A, es decir, las que verifican que $A \cdot B = B \cdot A$.**

Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} \\ B \cdot A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a-b \\ d & c-d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c = b \\ \left.\begin{aligned} d &= a-b \\ a-c &= d \end{aligned}\right\} d = a-b \\ b-d = c-d \rightarrow b = c \end{cases}$$

Hay infinitas soluciones. Las matrices B que cumplen $A \cdot B = B \cdot A$ son de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-b \end{pmatrix} \text{ con } a,\ b \in \mathbb{R}$$

Por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3 **Despeja la matriz X en la ecuación matricial $AX - 2X = B$ y halla su valor siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.**

$AX - 2X = B \rightarrow (A - 2I)X = B \rightarrow X = (A - 2I)^{-1} B$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

4 **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, halla los valores de m y n para que se verifique $A^2 + mA + nI = 0$.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m & 5m \\ 2m & -m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 + 2m + n & 5 + 5m \\ 2 + 2m & 11 - m + n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 14 + 2m + n = 0 \\ 5 + 5m = 0 \rightarrow m = -1 \\ 2 + 2m = 0 \\ 11 - m + n = 0 \rightarrow n = -12 \end{cases}$$

Así, $m = -1$ y $n = -12$.

5 **Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:**

a) Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1} utilizando esa propiedad.

b) Halla A^{13}.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

$$\frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}A \cdot A = I \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = 2I \cdot A = 2A$

$A^4 = A^3 \cdot A = 2A \cdot A = 2A^2 = 4I$

$A^5 = A^4 \cdot A = 4I \cdot A = 4A$

$A^6 = A^5 \cdot A = 4A \cdot A = 4A^2 = 8I = 2^{6/2}I$

$A^7 = A^6 \cdot A = 8I \cdot A = 8A = 2^{(7-1)/2}A$

$A^{13} = 2^{(13-1)/2}A = 2^6 A$

6 **De las matrices cuadradas A y B sabemos que:**

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula las matrices $A-B$, A y B.

$$A^2-AB+BA-B^2=(A+B)(A-B) \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}(A-B)$$

$$(A-B)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumando el sistema:

$$2A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Restando el sistema:

$$2B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7 **Si $|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}=1$, calcula los siguientes determinantes indicando, en cada caso, las propiedades que utilizas:**

a) $det(-2A)$ **b)** $det(A^{-1})$ **c)** $det(A^2)$ **d)** $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}$

a) $det(-2A)=(-2^3)\,det(A)=-8$ (Propiedad 5)

b) $A^{-1}\cdot A=I \to det(A^{-1}\cdot A)=1 \to det(A^{-1})\,det(A)=1$ (Propiedad 10) $\to det(A^{-1})=\dfrac{1}{det\,(A)}=1$

c) $det(A^2)=det(A\cdot A)=det(A)\cdot det(A)=1$ (Propiedad 10)

d) $\begin{vmatrix} a & -b & c \\ 2d & -2e & 2f \\ p & -q & r \end{vmatrix}\overset{(P.\,5)}{=}2\begin{vmatrix} a & -b & c \\ d & -e & f \\ p & -q & r \end{vmatrix}\overset{(P.\,5)}{=}-2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}=-2$

e) $\begin{vmatrix} -3d & -3e & -3f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}\overset{(P.\,5)}{=}-3\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ -p & -q & -r \end{vmatrix}\overset{(P.\,5)}{=}(-3)(-1)\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix}\overset{(P.\,3)}{=}-(-3)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ p & q & r \end{vmatrix}=-3$

(P. 5) = Propiedad 5. (P. 3) = Propiedad 3.

8 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, **halla todas las matrices no nulas** $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **que verifican la igualdad** $AX = mX$, **para algún valor de** m.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3x + 2y - z = mx \\ -x + z = my \\ -x - 2y + 3z = mz \end{cases} \to \begin{cases} (3-m)x + 2y - z = 0 \\ -x - my + z = 0 \\ -x - 2y + (3-m)z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema según los valores de m:

$$\begin{vmatrix} 3-m & 2 & -1 \\ -1 & -m & 1 \\ -1 & -2 & 3-m \end{vmatrix} = -m^3 + 6m^2 - 12m + 8 \to -m^3 + 6m^2 - 12m + 8 = 0 \to m = 2 \text{ (raíz triple)}$$

Si $m = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Todas las ecuaciones son proporcionales. El sistema tiene infinitas soluciones de la forma $(\mu - 2\lambda, \lambda, \mu)$.

Para $m = 2$, hay infinitas matrices $X = \begin{pmatrix} \mu - 2\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, no simultáneamente iguales a 0, que verifican la igualdad $AX = mX$.

Por ejemplo, si $\lambda = 1$ y $\mu = 1 \to A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9 **Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:**

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+3x & 3+3x & 3+3x & 3+3x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = (3+3x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 3-x & 0 & 0 \\ x & 0 & 3-x & 0 \\ x & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3+3x)(3-x)^3 = 3(x+1)(3-x)^3$$

10 **Prueba, sin desarrollarlo, que** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

11 Resuelve, si es posible, e interpreta geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$ Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 2.ª y 3.ª:

$\left.\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3x = 5 \to x = 5/3 \\ y = 2 - x \to y = 1/3 \end{array}$

Comprobamos si $\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verifica la 1.ª ecuación: $\frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \neq 5$

El sistema no tiene solución. Representa tres rectas que se cortan dos a dos.

b) El sistema es *compatible determinado*, debe verificarse que $ran\ (M) = ran\ (M') = 3$, según el teorema de Rouché. Como M' es una matriz cuadrada de orden 4, su determinante debe ser igual a 0.

$$|M'| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$ porque la 2.ª y 4.ª filas son iguales.

Podemos eliminar la última ecuación y resolverlo por la regla de Cramer:

$\left.\begin{array}{r} -x + y + z = 1 \\ 4y + 3z = 2 \\ x + 2y \quad = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{3}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{4}{5}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{5} = -\frac{2}{5}$$

Solución: $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$. Representa cuatro planos que se cortan en un punto.

12 Discute este sistema según los valores de a, resuélvelo cuando sea posible e interpreta geométricamente cada caso:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{r} ax + y \quad = a \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\}$ Según el teorema de Rouché, el sistema será compatible si $ran\ (M) = ran\ (M')$.

Estudiamos el rango de M buscando los valores que hacen $|M| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -a - 1 = 0 \to a = -1$$

Si $a = -1$, $ran\ (M) = 2$ porque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Estudiamos el rango de M' para $a = -1$:

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to ran\,(M') = 2$$

Así:

- Si $a = -1$: $ran\,(M) = ran\,(M') = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.
- Si $a \neq -1$: $ran\,(M) = ran\,(M') = 3$, el sistema es *compatible determinado*.

— Resolución si $a = -1$:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = -1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \lambda \to x = 1 + \lambda \\ z = 2 - 2y \to z = 2 - 2\lambda \end{array}$$

Soluciones: $(1 + \lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)$.

— Resolución si $a \neq -1$. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a+3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a+1 & a+3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ a+1 & 2 & a+3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-(a+1)} = 2$$

Solución: $(1, 0, 2)$

13 **Considera este sistema:**

$$\begin{cases} -x + y + z = 1 \\ 4y + az = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x + ay + 2z = 1 \end{cases}$$

a) ¿Es posible encontrar valores de a tales que el sistema sea incompatible?

b) ¿Es posible encontrar valores de a tales que el sistema sea compatible indeterminado?

Justifica tus respuestas.

a) El sistema será incompatible si $ran\,(M) \neq ran\,(M')$. Estudiemos el rango de M':

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \\ (4.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & a & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & a+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & a & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ a+1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2a^2 + 6a = -2a(a-3) = 0 \to a = 0,\ a = 3$$

Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$, $ran\,(M') = 4$ y $ran\,(M) < 4$ para cualquier valor de a. Por tanto, el sistema es *incompatible*.

b) Estudiemos el rango de M y M' en los casos $a = 0$ y $a = 3$:

- $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \to ran\,(M) = ran\,(M') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*.

- $a = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\to\; ran\,(M) = ran\,(M') = 3$$

El sistema es *compatible determinado*.

No existe ningún valor de a tal que el sistema sea *compatible indeterminado*.

14 **a) Comprueba que el siguiente sistema de ecuaciones es compatible indeterminado:**

$$\begin{cases} y + z - 2x = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) ¿Es posible añadirle una nueva ecuación de forma que el sistema sea compatible determinado?

c) ¿Y para que sea incompatible?

Justifica tus respuestas y pon ejemplos.

a) El sistema es compatible por ser homogéneo.

$$M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$|M| = 0 \;\to\; ran\,(M) < 3 \;\to\;$ El sistema es *compatible indeterminado*.

b) Sí. Por ejemplo, si añadimos la ecuación $z = 0$ el sistema es *compatible determinado*.

c) No es posible porque el sistema es compatible al ser homogéneo.