7 Límites de funciones. Continuidad

Página 205

Piensa y encuentra límites

1 a) $+\infty$; $+\infty$; $+\infty$ b) $+\infty$; $-\infty$; $-\infty$

c) 4; 8; -9 d) 0; 0; 0

e) 0; 0; 0 f) $+\infty$; $+\infty$; 0

g) $+\infty$; $+\infty$ h) $-\infty$; $-\infty$

2 a) 1 b) 0 c) 403,43

Página 206

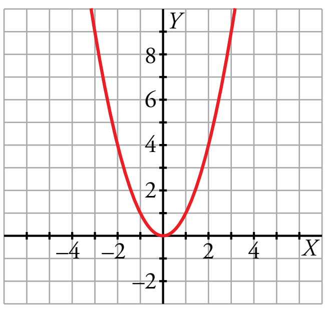
1 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

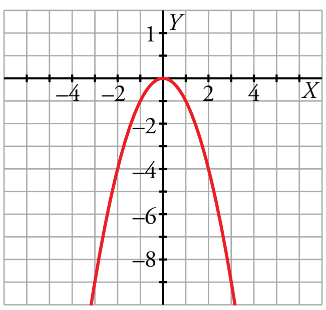
c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe

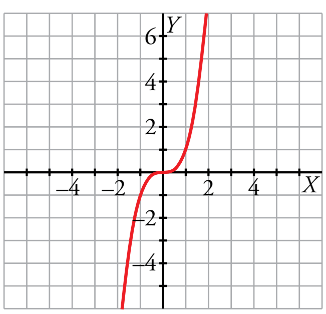
2 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

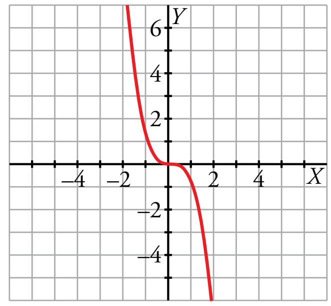


c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



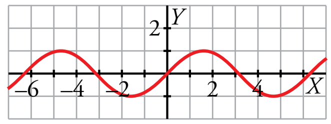
d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$



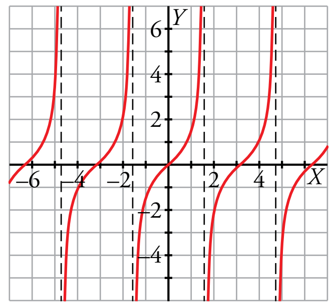
e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe

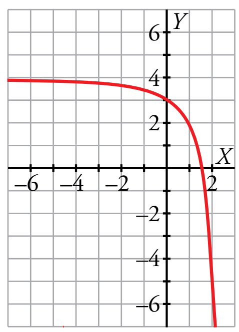


f) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe

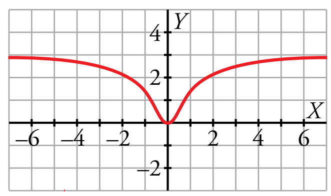
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ no existe



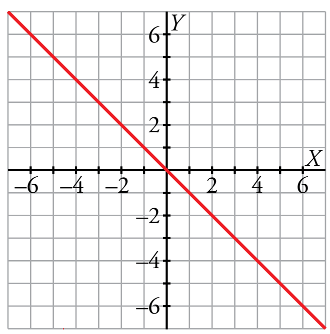
3 a)



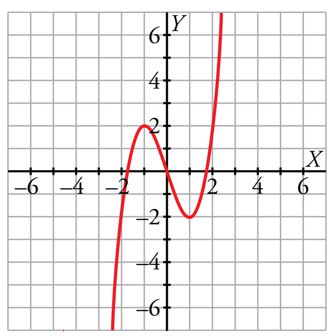
b)



c)



d)



Página 207

4 a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

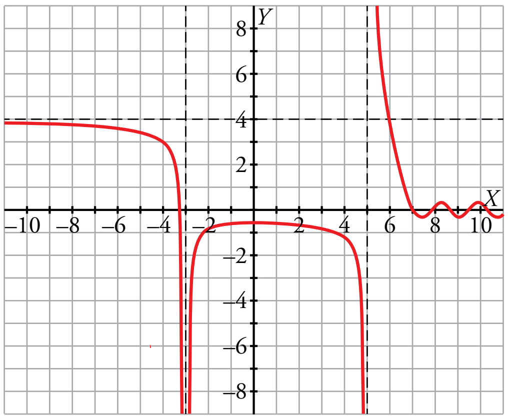
b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to 7} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$

5

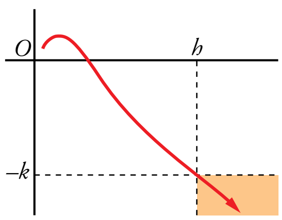


Página 208

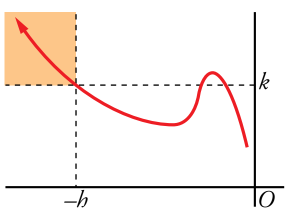
1 h = 28 100

Página 209

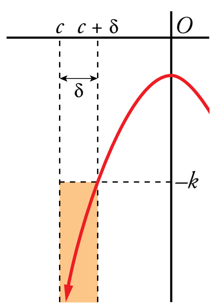
2 a) Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número h (tan grande como sea necesario) tal que si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.



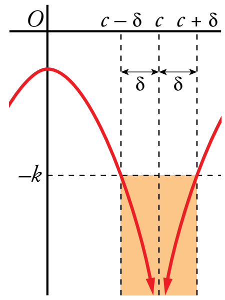
b) Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar otro número h (tan grande como sea necesario) tal que si $x < -h$, entonces $f(x) > k$.



c) Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si $\delta < x < c + \delta$, entonces $f(x) < -k$.



d) Dado un número k (arbitrariamente grande), podemos encontrar un número $\delta > 0$ tal que si $c - \delta < x < c + d$, entonces $f(x) < -k$.



Página 210

1 2. El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites.

3. El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.

4. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea 0 (para que no se produzca una división entre 0).

5. El límite de la potencia de dos funciones es igual a la potencia de sus límites, siempre que la base de la potencia sea positiva (para que tenga sentido la potencia de exponente real).

6. El límite de la raíz de una función es igual a la raíz de su límite. En el caso de que la potencia sea de índice par, además, la función debe ser no negativa (para que se pueda hallar dicha potencia).

7. El límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo de su límite (para que tenga sentido el límite y el resultado, es necesario que tanto la función como su límite sean positivos).

Página 211

2

a) $+\infty$	b) $+\infty$	c) Indeterminación.
d) $+\infty$	e) $-\infty$	f) Indeterminación.
g) Indeterminación.		h) 0
i) 0	j) 0	k) $\pm\infty$
l) $\pm\infty$	m) $\pm\infty$	n) $+\infty$
ñ) 0	o) Indeterminación.	p) No existe.
q) 0	r) $+\infty$	s) Indeterminación.

Página 212

1

a) Indeterminación.		b) Indeterminación.
c) $+\infty$	d) 0	e) Indeterminación.
f) $\pm\infty$	g) Indeterminación.	h) $+\infty$

Página 213

1 Son infinitos cuando $x \to +\infty$ las expresiones a), c), d), f), g) e i).

2 a) 4^x; $1{,}5^x$; $3x^5$; x^2; $\sqrt{x}$; $log_2 x$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{log_2 x}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^5}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$

Página 215

1 a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$
d) $+\infty$ e) $+\infty$ f) $+\infty$

2 a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
d) $\dfrac{1}{2}$ e) $+\infty$ f) 0

Página 216

3 a) $e^{1/5}$ b) $+\infty$ c) 0
d) 1 e) e^5 f) e^{-5}
g) $+\infty$ h) e^{-5} i) e^5

4 a) e^3 b) e^{-2} c) $e^{3/5}$
d) 1 e) $e^{-3/2}$ f) e^2

Página 217

5 a) e^{10} b) e^{-2}

Página 219

1 a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$
e) $-\infty$ f) No existe.
g) $-\infty$ h) $-\infty$ i) $-\infty$ j) $+\infty$

2 a) $-\infty$ b) 0 c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $-\infty$
e) –1 f) e^6 g) e^{-5} h) e^3

Página 221

1 a) –7 b) 2 c) 3 d) e

2 a) 1) b) No existe $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Página 222

3 a) $\dfrac{-9}{8}$ b) $\dfrac{15}{28}$

4 a) 0

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ no existe. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Página 223

5 –5

6 e^{12}

Página 225

1 a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) 2 d) 2
e) e f) $ln\,\dfrac{1}{2}$ g) $\dfrac{-1}{2}$ h) $\dfrac{5}{4}$

Página 227

1 Hay una raíz en (–4, –3). Hay una raíz en (0, 1).
Hay una raíz en (1; 1,5). Hay una raíz en (1,5; 2).

2 Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $F(c) = 0$; es decir, existe $c \in (0, 1)$ tal que las dos funciones se cortan en ese punto.

3 a) $f(x) = x^2 - 1$ es continua en [–1, 1]. Por el teorema de Weierstrass, podemos asegurar que tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

b) $f(x) = x^2$ es continua en [–3, 4]. Por tanto, también tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ es continua en [2, 5]. Por tanto, tiene un máximo y un mínimo absolutos en ese intervalo.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ no es continua en [0, 2], pues es discontinua en $x = 1$. No podemos asegurar que tenga máximo y mínimo absolutos en ese intervalo. De hecho, no tiene ni máximo ni míminimo absolutos puesto que:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ es continua en [–5, 10]. Por tanto, tiene máximo y mínimo absolutos en ese intervalo.

f) La función $f(x) = e^{-x}$ es continua en $\mathbb{R}$, luego lo es en el intervalo [0, 1]. Por tanto, por el teorema de Weierstrass, alcanza su máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo.

Página 228

1 Hazlo tú.
a) 0 b) 0 c) $-\infty$

3 Hazlo tú.
a) $+\infty$ b) $+\infty$

Página 229

4 Hazlo tú.

a) $+\infty$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$

d) $e^{1/6}$ e) $+\infty$ f) 1

Página 230

5 Hazlo tú.

a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{1}{e^6}$ c) $-\frac{1}{2}$

6 Hazlo tú.

Para $x < 0$ y para $x > 0$ es una función continua.

En $x = 0$ no existe el límite porque los límites laterales son distintos.

La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad inevitable de salto finito.

Página 231

7 Hazlo tú.

Si $a = \frac{1}{2} + 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $b = 0$, la función es continua en $\mathbb{R}$.

8 Hazlo tú.

Por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ tal que $F(c) = 0$, es decir:

$$f(c) - g(c) = 0 \rightarrow f(c) = g(c)$$

Las gráficas se cortan, al menos, en el punto de abscisa $x = c$.

Página 232

1 a) -1 b) e^8 c) 1

2 $a = 2 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x}\right) = -\frac{1}{2}$

3 La función es continua cuando $x \neq 1$ porque las funciones que intervienen son continuas al ser funciones polinómicas.

Si $a \neq 4$, entonces la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$ al existir los límites laterales en dicho punto y ser distintos.

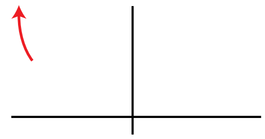
4 a) No existe ningún valor de k ya que los límites laterales en el punto $x = 0$ no existen.

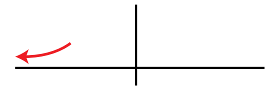
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Página 233

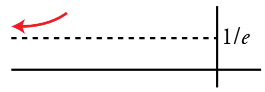
1 a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $+\infty$

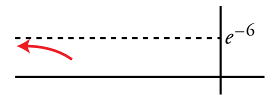
2 a) $+\infty$ b) 0





c) $\frac{1}{e}$ d) $\frac{1}{e^6}$





3 a) $\frac{5}{4}$ b) $+\infty$ c) $\sqrt{2}$ d) 3

e) $+\infty$ f) 1 g) $-\infty$ h) $-\infty$

4 a) 0 b) $+\infty$ c) -3 d) $\frac{1}{2}$

e) $-\infty$ f) 0 g) $+\infty$ h) $+\infty$

5 a) e^2 b) e^6 c) e^{-4}

d) $e^{-2/9}$ e) 1 f) $+\infty$

6 a) -1 b) 0

7 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2 - 1} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2 - 1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x}{\log x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 2x}{\log x^2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} - 5x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{3x^2 + 2} - 5x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - 1}) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{3x^2 - 1}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1}\right) = 1$

8 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

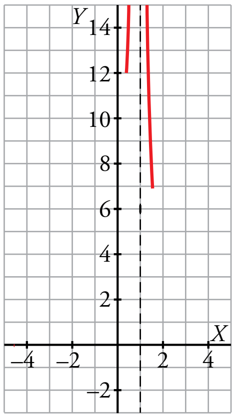
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

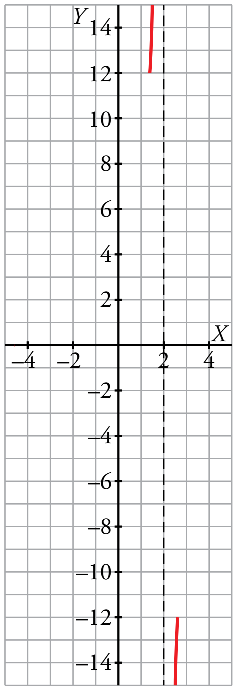
9 a) 0 b) 0 c) Indeterminado. d) $+\infty$

10 a) 5 b) 0 c) $-\frac{1}{12}$

d) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x + 5}{x^2 + x - 6} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x + 5}{x^2 + x - 6} = +\infty$

11 a) $+\infty$





b) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-4x+15}{x^2-5x+6} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-4x+15}{x^2-5x+6} = -\infty$

12 a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(\sqrt{x+9}+3)} = +\infty$

c) $\dfrac{1}{3}$

Página 234

13 a) $e^{1/2}$ b) $e^{8/5}$

14 a) $-\dfrac{3}{5}$ b) 1

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = +\infty$

d) $\ln \dfrac{a}{b}$ e) –2 f) 0

g) $-\dfrac{9}{2}$ h) 0 i) $\dfrac{4}{3}$

j) 0 k) 0 l) 1

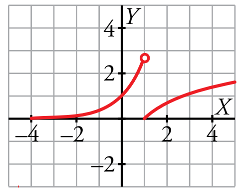
15 a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

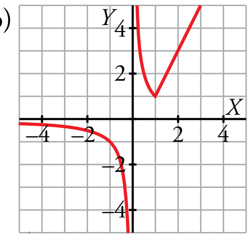
b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -2$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

16 a)

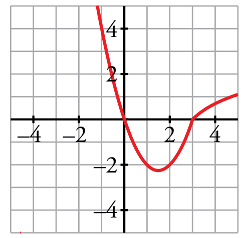


b)



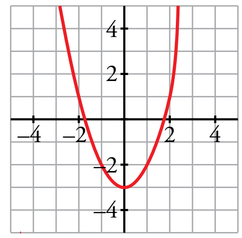
17 a) La función es continua cuando $x \neq 3$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Cuando $k = -3$ la función también es continua en $x = 3$.



b) La función es continua cuando $x \neq 2$ ya que las funciones que intervienen lo son.

Cuando $k = 1$ la función también es continua en $x = 2$.



18 Cuando $a = 2$ y $b = -1$ la función es continua en todo su dominio.

19 a) La función es continua cuando $x \neq 0$ y $x \neq 1$ ya que las funciones que intervienen lo son.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0) \rightarrow$ Es continua en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 4 = f(1) \rightarrow$ Es continua en $x = 1$.

b) La función es continua cuando $x \neq 0$ y $x \neq \pi$ ya que las funciones que intervienen lo son.

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0) \rightarrow$ Es continua en $x = 0$.

El límite existe y presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = \pi$.

c) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que no está definida cuando $x = 0$.

Cuando $x \neq 0$ y $x \neq -1$ la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

$\lim\limits_{x \to -1} h(x) = 1 = h(-1) \rightarrow$ Es continua en $x = -1$.

d) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{2\}$ ya que no está definida cuando $x = 2$.

Cuando $x \neq -2$ y $x \neq 2$ la función es continua porque la función que interviene lo es.

En $x = 2$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Como existe el límite pero no coincide con el valor de la función, tiene una discontinuidad evitable en $x = -2$.

20 a) En $x = -1$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito. En $x = 2$ hay una discontinuidad evitable.

b) En $x = -2$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito. En $x = 3$ hay una discontinuidad evitable.

21 a) I) En $x = -2$ y en $x = 0$. II) En $x = 1$.

b) I) $\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

II) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

22 a) $+\infty$ b) e^{-2} c) 2 d) $-\dfrac{2}{3}$

e) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{1}{2x(x-1)} = -\infty$; $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{1}{2x(x-1)} = +\infty$

f) $+\infty$ g) 0 h) 1

Página 235

23 a) 0 b) 1 c) e d) $+\infty$ e) 1 f) $e^{-2/3}$

24 Cuando $a = 3$, la función es continua también en $x = 0$ ya que $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$ y, por tanto, lo es en el intervalo $(-1, +\infty)$.

25 Cuando $a = 20$, la función es continua en $x = 15$, ya que $f(15) = \lim_{x \to 15} f(x)$.

Cuando $b = 5/6$ la función es continua en $x = 30$, ya que $f(30) = \lim_{x \to 30} f(x)$.

26 Para que la función sea discontinua en $x = 2$, $b = -5$.

El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

En $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = +\infty$;

$\lim_{x \to 1^+} \dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = -\infty$

La discontinuidad es inevitable de salto infinito.

En $x = 2$: $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x-4}{(x-1)(x-2)^2} = +\infty$

27 $a = 4$; $b = -10$

28 a) $k = e^3$. Además, es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que el cociente de polinomios solo se anula cuando $x = 1$.

b) $k = -1$. Esta función también es continua en todo $\mathbb{R}$ porque el cociente solo se anula cuando $x = 1$.

29 Cuando $b = \dfrac{1}{2}$ la función es continua en $\mathbb{R}$.

30 Para $k = 2$ la función es continua en $x = 0$ ya que $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$.

31 No puede existir ningún valor ya que el límite no existe porque los límites laterales son distintos.

32 a) El dominio de definición es $(2, 3) \cup (3, +\infty)$ y en él la función es continua.

b) La función es continua en el intervalo $(2, +\infty)$.

c) La función es continua en su dominio, es decir, en $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$.

d) La función es continua en su dominio, $\mathbb{R} - \{k\pi\}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

33 La función es continua cuando $x \neq 1$ al estar definida mediante funciones continuas.

Cuando $m = 1$ o $m = 2$ la función es continua en $x = 1$.

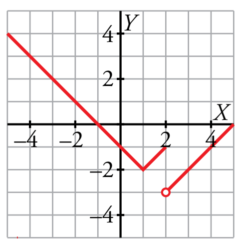
Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$ la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 1$.

34 a) $a = 1$ b) 0

35 El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$. La función es continua en él. En $x = -2$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito. En $x = 2$ tiene una discontinuidad inevitable de salto infinito.

36
- Si $x \neq -1$ y $x \neq 1$, la función es continua.
- Si $x = -1$, la función es continua.
- Si $x = 1$, la discontinuidad es de salto (finito).

37 $t = 4$



38 a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

b) $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$

39 Hay una discontinuidad de salto (finito) en $x = 0$.

Página 236

40 $a = -3$, $b = 0$

41 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [ln(x+1) - ln(x)] =$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = ln \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} = ln\, 1 = 0$

b) 1

42 a) No hay ningún valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

b) $\lim\limits_{t \to \infty} T(t) = 0$

43 a) $a = 20$ b) 4,47 €

44 $f(x)$ no es continua en $x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, f no es continua en el intervalo [0, 1]; luego no cumple las hipótesis del teorema de Bolzano en dicho intervalo.

45 Por el teorema de Bolzano sabemos que existe al menos un punto $c \in (1, 2)$ tal que:

$$h(c) = 0 \to f(c) - g(c) = 0 \to f(c) = g(c)$$

Es decir, existe al menos un punto $c \in (1, 2)$ en el que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan (ya que las dos funciones toman el mismo valor).

46 $f(0) = 1$; $f(2) = 5$

Por el teorema de los valores intermedios o teorema de Darboux, la función toma todos los valores comprendidos entre 1 y 5, es decir, toma todos los valores del intervalo [1, 5].

47 Por el teorema de Bolzano, podemos asegurar que existe $c \in (1, 9)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, la función $g(x)$ tiene al menos un cero en el intervalo [1, 9].

48 $g(0) = 1$

49 a) V b) V c) F d) F

e) V f) V g) V h) V

50 a) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -h$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

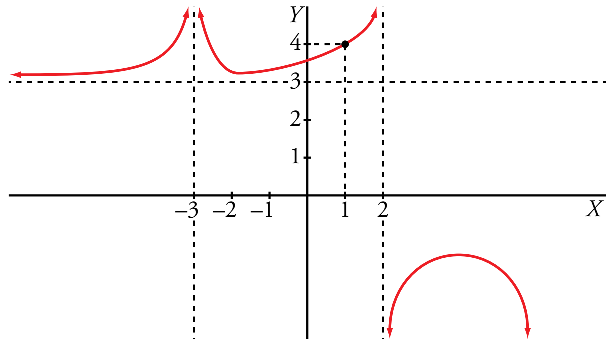
b) Dado k, podemos encontrar h tal que, si $x > h$, entonces $f(x) < -k$.

c) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 - \delta < x < 2$, entonces $f(x) > k$.

d) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $2 < x < 2 + \delta$, entonces $f(x) < -k$.

e) Dado k, podemos encontrar δ tal que, si $3 - \delta < x < 3 + \delta$, entonces $f(x) > k$.

f) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1 + \delta$, entonces $|f(x) - 4| < \varepsilon$.



51 • Si $b = 0$ y $a \neq 0$, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

• Si $b \neq 0$ y $a = -\frac{b}{2}$, la función tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

Página 237

52 a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) 3

53 a) $k = \frac{1}{2}$

b) La función es discontinua en $x = 0$ para cualquier valor de k ya que no existe el límite en $x = 0$.

c) $k = 1$

54 $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{11}{4}$

55 Tenemos que $sen\, x < x < tg\, x$.

Dividiendo entre $sen\, x$, queda:

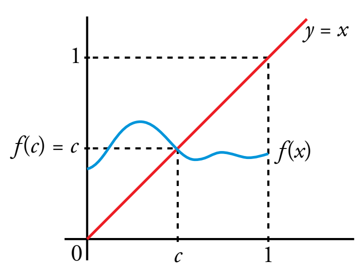
$$1 < \frac{x}{sen\, x} < \frac{1}{cos\, x} \to 1 > \frac{sen\, x}{x} > cos\, x$$

Tomando límites cuando $x \to 0$, queda:

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} \geq 1; \text{ es decir: } \lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$$

56 a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) $\frac{1}{2}$

57 Por el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$, o bien $f(c) = c$.



Autoevaluación

1 a) 0

b) $\frac{1}{e}$

c) 1

d) 1

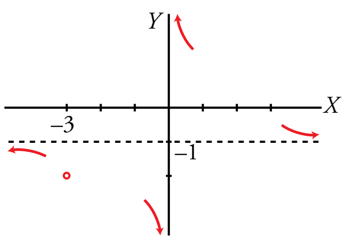
2 a) En $x = 0$, tiene una discontinuidad de salto infinito.

En $x = -3$, tiene una discontinuidad evitable.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9 - x^2}{x^2 + 3x} = -1$

c)



3 a) El dominio de definición es $\mathbb{R} - \{-2\}$.

Cuando $x \neq -2$ y $x \neq 0$ la función es continua porque las funciones que intervienen lo son.

En $x = -2$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

Al ser los límites laterales distintos y finitos, en $x = 0$ tiene una discontinuidad inevitable de salto finito.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x+2} = 1$

4 $b \neq 0$ para que la función esté bien definida.

Si $a = 1$ y $b = 1$, la función es continua en $x = 0$.

5 La función g es continua en $[0, 4]$ y *signo de* $g(0) \neq$ *signo de* $g(4)$.

Por el teorema de Bolzano, existirá un $c \in (0, 4)$ tal que $g(c) = 0$; es decir, existe un $c \in (0, 4)$ tal que $f(c + 1) = f(c)$.

6 Por el teorema de los valores intermedios, $f(x)$ toma todos los valores del intervalo [1; 5,007].

Por tanto, existirá un $0 < c < 5$ tal que $f(c) = 4$. Es decir, $c + e^{-c} = 4$.