Autoevaluación

Página 267

1 Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $y = (2x + 2)\sqrt{x-1}$ **b)** $y = arc\ tg\ \dfrac{x+3}{x-3}$ **c)** $y = ln\,(sen\ x)^2$

d) $y = \sqrt[3]{2^{x-1}}$ **e)** $y = (tg\ x)^{1-x}$ **f)** $x^2 + y^2 - xy = 0$

a) $y' = 2\sqrt{x-1} + (2x+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1} + \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{2(x-1)+x+1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{3x-1}{\sqrt{x-1}}$

b) $y' = \dfrac{D\left(\dfrac{x+3}{x+3}\right)}{1+\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^2} = \dfrac{\dfrac{-6}{(x-3)^2}}{\dfrac{(x-3)^2+(x+3)^2}{(x-3)^2}} = \dfrac{-6}{2x^2+18} = \dfrac{-3}{x^2+9}$

c) Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$y = ln\,(sen\ x)^2 = 2\ ln\,(sen\ x) \ \rightarrow\ y' = 2\cdot\frac{cos\ x}{senx}$$

d) Expresando la raíz como potencia:

$$y = \sqrt[3]{2^{x-1}} = 2^{(x-1)/3} \ \rightarrow\ y' = D\left(\frac{x-1}{3}\right)\cdot 2^{(x-1)/3}\cdot ln\ 2 = \frac{ln\ 2}{3}\cdot 2^{(x-1)/3}$$

e) Aplicamos la derivación logarítmica:

$$ln\ y = (1-x)\ ln\,(tg\ x) \ \rightarrow\ \frac{y'}{y} = -ln\,(tg\ x) + (1-x)\frac{D(tg\ x)}{tg\ x} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ \frac{y'}{y} = -ln\,(tg\ x) + (1-x)\frac{1+tg^2\ x}{tg\ x} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ y' = \left[-ln\,(tg\ x) + \frac{(1-x)(1+tg^2\ x)}{tg\ x}\right](tg\ x)^{1-x} =$$

$$= -(tg\ x)^{1-x}\ ln\,(tg\ x) + (1-x)(1+tg^2\ x)(tg\ x)^{-x}$$

f) Derivamos implícitamente:

$$x^2 + y^2 - xy = 0 \ \rightarrow\ 2x + 2yy' - y - xy' = 0 \ \rightarrow\ (2y-x)y' = y - 2x \ \rightarrow\ y' = \frac{y-2x}{2y-x}$$

2 Aplica la definición de derivada para hallar $f'(x)$ siendo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-(x+h)^2}{(x+h)^2\cdot x^2} = \frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2xh-h^2}{x^2(x+h)^2h} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

3 Dada la función:

$$f(x) = |x| + |x^2 + 2x|$$

defínela por intervalos y obtén:

a) $f'(x)$

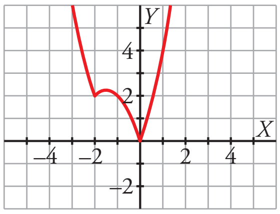
b) $f''(x)$

Representa $f(x)$, $f'(x)$ **y** $f''(x)$.

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$|x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 2x & \text{si } -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

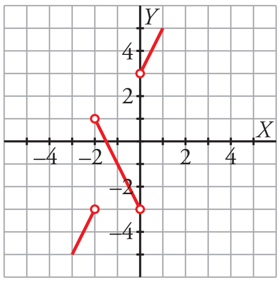
$$f(x) = |x| + |x^2 + 2x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < -2 \\ -x^2 - 3x & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ x^2 + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f(x)$

$f(x)$ no es derivable en $x = -2$ y $x = 0$ ya que los puntos son angulosos. La derivada es:

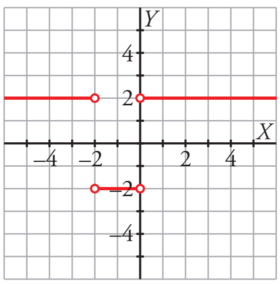
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ -2x - 3 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f'(x)$

Al no existir $f'(-2)$ ni $f'(0)$, no existen $f''(-2)$ ni $f''(0)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Gráfica de $f''(x)$

4 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

Represéntala.

Continuidad:

- En $x \neq 1$: La función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

La función es continua en $x = 1$ y, por tanto, es continua en todo $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 1$: La función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- En $x = 1$:

$$f'(1^-) = 4 \neq f'(1^+) = 1$$

La función no es derivable en $x = 1$.

Por tanto, la función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

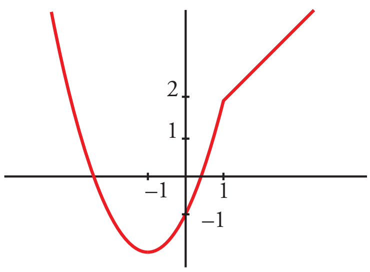
Puntos en los que $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 2x + 2 \text{ si } x < 1$$

$$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f'(x) = 1 \text{ si } x > 1 \rightarrow f'(x) \neq 0 \text{ si } x > 1$$

Por tanto, la derivada se anula en $x = -1$.



Gráfica de $f(x)$

5 **Halla a y b para que $f(x)$ sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$$

Para los valores de a y b que has obtenido, estudia su derivabilidad.

- Si $x \neq -1$ y $x \neq 0$:

  La función es continua, pues está formada por polinomios.

- En $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (ax + b) = -a + b \\ f(-1) = -a + b \end{array}\right\}$$

  Para que sea continua, ha de ser $-2 + a = -a + b$; es decir: $b = 2a - 2$.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (ax + b) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + 2) = 2 \\ f(0) = 2 \end{array}\right\} \text{ Para que sea continua, ha de ser } b = 2.$$

  Por tanto, $f(x)$ será continua si $a = 2$ y $b = 2$.

  Para estos valores, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } 0 \le x \end{cases}; \text{ es decir: } f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$:

  Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

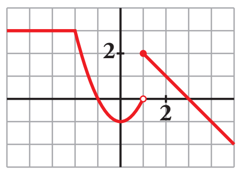
- En $x = 0$:

$$f'(0^-) = 2 \neq f'(0^+) = 0$$

  La función no es derivable en $x = 0$.

  Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

6 **Observando la gráfica de esta función f, estudia su derivabilidad.**
Halla, si existen, $f'(-4)$, $f'(0)$ y $f'(3)$.



- f es discontinua en $x = 1$. Por tanto, no es derivable en $x = 1$.

  En $x = -2$ observamos que $f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$: tampoco es derivable.

  Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

- $f'(-4) = 0$ porque en ese punto la función es constante.

  $f'(0) = 0$ porque en $x = 0$ observamos un mínimo, luego la tangente es horizontal.

  $f'(3) = -1$ porque -1 es la pendiente de la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(3, 0)$:

$$m = \frac{2 - 0}{1 - 3} = -1$$