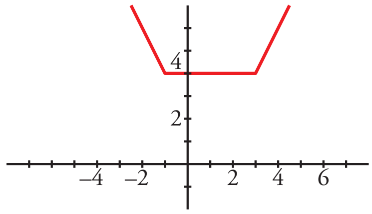
48 **a) Representa la función $f(x) = |x+1| + |x-3|$.**

Observando la gráfica, di en qué puntos no es derivable.

b) Representa $f'(x)$.

* *Mira el Ejercicio resuelto 4.*

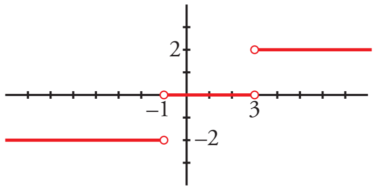
a) $f(x) = \begin{cases} -x-1-x+3 & \text{si } x < -1 \\ x+1-x+3 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ x+1+x-3 & \text{si } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ 2x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



No es derivable en $x = -1$ ni en $x = 3$.

(Son puntos "angulosos").

b) $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



49 **Dada la función $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$**

a) Halla $f'(x)$. **b) Halla $f''(x)$.**

Representa gráficamente los resultados.

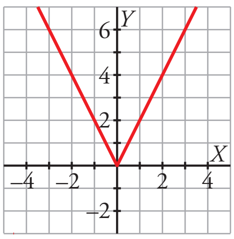
a) La función dada es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Claramente las derivadas laterales coinciden en $x = 0$.

Por tanto, es derivable y $f'(0) = 0$.

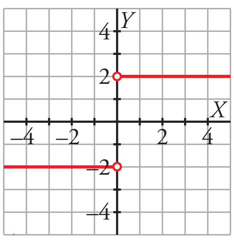
Gráfica de $f'(x)$:



b) Como se puede ver en la gráfica anterior, $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Claramente las derivadas laterales no coinciden en $x = 0$. Por tanto, no existe $f''(0)$.



50 **Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $y = |x - 2|$

b) $y = |x^2 + 6x + 8|$

c) $y = x + |x - 3|$

d) $y = x^2 + |x|$

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -1 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \; f'(2^-) \ne f'(2^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Definimos la función por intervalos. Para ello, calculamos los puntos en los que $y = 0$:

$$x^2 + 6x + 8 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = -4 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8 & \text{si } x < -4 \\ -x^2 - 6x - 8 & \text{si } -4 \le x \le -2 \\ x^2 + 6x + 8 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Derivamos:

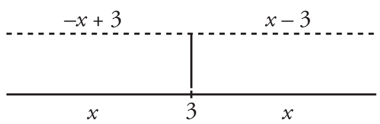
$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -4 \\ -2x - 6 & \text{si } -4 < x < -2 \\ 2x + 6 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4^-) = 2(-4) + 6 = -2 \\ f'(-4^+) = -2(-4) - 6 = 2 \end{array}\right\} \; f'(-4^-) \ne f'(-4^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -2(-2) - 6 = -2 \\ f'(-2^+) = -2(-2) + 6 = 2 \end{array}\right\} \; f'(-2^-) \ne f'(-2^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(-2)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{-4, -2\}$.

c) Analizamos el signo de $x - 3$ para definir la función por intervalos:



$$x + (-x + 3) = 3$$

$$x + x - 3 = 2x - 3$$

Así:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 0 \\ f'(3^+) = 2 \end{array}\right\} \; f'(3^-) \ne f'(3^+) \;\rightarrow\; \text{No existe } f'(3)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$.

d) Definimos la función por intervalos. Recordamos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$.

Así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivamos:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\ f'(0^+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{array}\right\} f'(0^-) \ne f'(0^+) \to \text{ No existe } f'(0)$$

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

51 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$

b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 - 1}$

a) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Continuidad:

- Si $x \ne 0$:

  Es continua, pues está formada por dos funciones continuas en los intervalos en los que están definidas.

- Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{1-x} = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0). \text{ Es continua en } x = 0.$$

  Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad:

- Si $x \ne 0$: Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-1}{(1+x)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = 0$:

  $f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = -1 \to$ No es derivable en $x = 0$.

  Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

b) Definimos la función por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2-1} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x}{x^2-1x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$. Por tanto, en $x = -1$ y en $x = 1$ la función no es continua (ni derivable).

Continuidad:

- Si $x \ne 0$, $x \ne -1$, $x \ne 1$:

  La función es continua, pues está formada por funciones continuas (en estos puntos).

- En $x = -1$ y en $x = 1$:

  No es continua, pues no está definida en estos puntos.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-x}{x^2-1} = 0 \\[2ex] f(0) = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

La función es continua en $x = 0$.

  Por tanto, es una función continua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Derivabilidad:

- Si $x \ne 0$, $x \ne -1$, $x \ne 1$: Es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$ y en $x = 1$: No es derivable, pues no está definida la función.
- En $x = 0$:

  $f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = -1 \rightarrow$ No es derivable en $x = 0$.

  Por tanto, es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

52 Si $f(x) = x^2|x|$, halla f', f'' y f'''.

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

Derivando:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f'(0^-) = f'(0^+) = f'(0) = 0$).

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{si } x < 0 \\ 6x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$, tenemos que $f''(0^-) = f'(0^+) = f''(0) = 0$).

$$f'''(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x < 0 \\ 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(En $x = 0$ no existe f''', puesto que $f'''(0^-) = -6 \ne f'''(0^+) = 6$).

53 Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{x^2-9} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x(x-3)}{(x-3)(x+3)} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{array}\right\} = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x}{x+3} & \text{si } x \neq 0,\ x \neq 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-3\}$. Por tanto, en $x = -3$ no es continua (ni derivable), pues no está definida.

Continuidad:

- En $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$: Es continua, pues las funciones que la forman son continuas en este caso.
- En $x = 0$ debe ser $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x+3} = 0 \\ f(0) = -1 \end{array}\right\} \text{ No es continua en } x = 0 \text{ (tiene una discontinuidad evitable).}$$

- En $x = 3$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x}{x+3} = 1 \\ f(3) = 1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3). \text{ La función es continua en } x = 3.$$

- En $x = -3$: No es continua, pues no está definida.

  Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

Derivabilidad:

- Si $x \neq 0$, $x \neq 3$ y $x \neq -3$: Es derivable. Además: $f'(x) = \dfrac{6}{(x+3)^2}$
- En $x = 0$ y en $x = -3$: No es derivable, pues no es continua.
- En $x = 3$: Sí es derivable, pues $f'(3^-) = f'(3^+) = f'(3) = \dfrac{1}{6}$.

  Por tanto, $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$. Además:

$$f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq -3$$

54 Estudia la derivabilidad en $x = 0$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \le 0 \\ 1 - \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, la función es continua en $x = 0$.

Veamos si es derivable:

- Si $x \neq 0$, tenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

  No existen las derivadas laterales en $x = 0$. Por tanto, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

55 **Determina, si es posible, el valor del parámetro a para que la función f sea derivable en todo su dominio de definición:**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \le 1 \\ a(1 - e^{1-x}) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- Si $x > 0$, $x \ne 1$: La función es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x \ln x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} [a(1 - e^{1-x})] = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = 0.$$

Derivabilidad:

- Si $x > 0$, $x \ne 1$:

  Es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ ae^{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- En $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 1 \\ f'(1^+) = a \end{array}\right\} f(x) \text{ es derivable en } x = 1 \text{ si } a = 1.$$

Luego, para que f sea derivable en todo su dominio de definición, ha de ser $a = 1$.

56 **Averigua los puntos de derivada nula de estas funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{(x+3)^2}$

b) $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$

c) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$

d) $y = e^x(x-1)$

e) $y = x^2 e^x$

f) $y = sen\, x + cos\, x$

a) $y' = \dfrac{(x+3)^2 - 2(x-3)x}{(x+3)^4} = \dfrac{(x+3) - 2x}{(x+3)^3} = \dfrac{3 - x}{(x+3)^3}$

$y' = 0 \to 3 - x = 0 \to x = 3 \to y = \dfrac{1}{12}$

Se anula en el punto $\left(3, \dfrac{1}{12}\right)$.

b) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x^2} \to y' = \dfrac{-16(3x^2 - 8x)}{(x^3 - 4x^2)^2}$

$y' = 0 \to 3x^2 - 8x = 0 \to x(3x - 8) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \text{(no vale)} \\ x = \dfrac{8}{3} \to y = \dfrac{-27}{16} \end{cases}$

$x = 0$ no está en el dominio.

La derivada se anula en el punto $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{-27}{16}\right)$.

c) $y' = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1)-(x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$

$= \dfrac{\cancel{2x^3}+2x^2+\cancel{2x}-\cancel{x^2}-\cancel{x}-1-\cancel{2x^3}+\cancel{2x^2}-\cancel{2x}-\cancel{x^2}+\cancel{x}-1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{2x^2-2}{(x^2+x+1)^2}$

$y' = 0 \to 2x^2 - 2 = 0 \to x^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \to y = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \to y = 3 \end{cases}$

Se anula en los puntos $(-1, 3)$ y $\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$.

d) $y' = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$y' = 0 \to x = 0 \to y = -1$

Se anula en el punto $(0, -1)$.

e) $y' = 2x\,e^x + x^2\,e^x = e^x(2x + x^2)$

$y' = 0 \to 2x + x^2 = 0 \to x(2+x) = 0 \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = -2 \to y = 4e^{-2} \end{cases}$

Se anula en los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 4e^{-2})$.

f) $y' = \cos x - \operatorname{sen} x$

$y' = 0 \to \cos x = \operatorname{sen} x \to \operatorname{tg} x = 1 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k \to y = \sqrt{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k \to y = -\sqrt{2} \end{cases}$

Se anula en los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \sqrt{2}\right)$, $\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k, -\sqrt{2}\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

57 **Indica los puntos de derivada nula de estas funciones:**

a) $f(x) = (3x - 2x^2)\,e^x$

b) $y = \cos 2x - 2\cos x$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$

d) $y = \sqrt{4x - x^2}$

a) $f'(x) = (3-4x)\,e^x + (3x - 2x^2)\,e^x = (3 - 4x + 3x - 2x^2)\,e^x = (-2x^2 - x + 3)\,e^x$

$f'(x) = 0 \to -2x^2 - x + 3 = 0 \to x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{-4} = \dfrac{1 \pm 5}{-4} \begin{cases} x = \dfrac{-3}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

b) $y' = -\operatorname{sen} 2x \cdot 2 - 2 \cdot (-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} x = -2 \cdot 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x + 2\operatorname{sen} x = 2\operatorname{sen} x\,(-2\cos x + 1)$

$y' = 0 \to 2\operatorname{sen} x(-2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \to x = 0 + k \cdot \pi \\ -2\cos x + 1 = 0 \to \cos x = \dfrac{1}{2} \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k; \text{ con } k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \end{cases}$

c) Dominio $= (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

$y' = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} = 0 \to x = 2$

Pero $x = 2$ no pertence al dominio de definición de la función. Por tanto, no tiene ningún punto de derivada nula.

d) Dominio $= [0, 4]$

$y' = \dfrac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \dfrac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}} = 0 \to x = 2$ (Sí pertenece al dominio)

La derivada se anula en $x = 2$.