5 Optimización de funciones

Página 277

1 Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

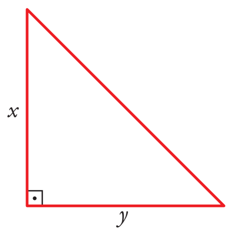
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 5 \to f(5) = 10 \\ x = -5 \to \text{(no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$)

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2 De entre todos los triángulos rectángulos cuyos catetos tienen longitudes que suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.



$x + y = 10 \to y = 10 - x$

$$\text{Área} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{x \cdot (10 - x)}{2} = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

Tenemos que maximizar la función:

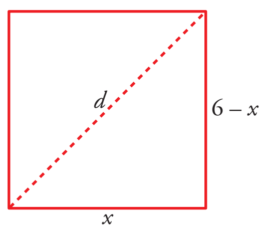
$$f(x) = x + \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \to x = 5 \to y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \frac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego en } x = 5 \text{ está el máximo} \right)$.

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3 Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?



$$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

Tenemos que minimizar la función:

$$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

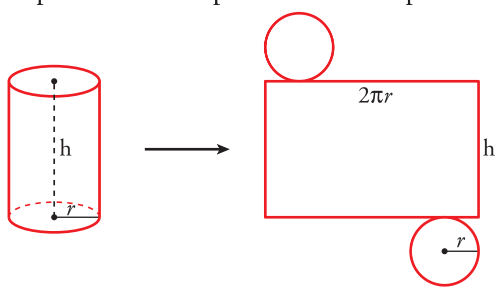
$$f'(x) = 0 \to -6 + 2x = 0 \to x = 3$$

($f(0) = 6$; $f(6) = 6$; $f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$; y $f(x)$ es continua. Luego en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4 Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$\text{Área total} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$