18 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Halla a y b.**

$f(x) = ax^3 + bx;\ f'(x) = 3ax^2 + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \to a + b = 1 \\ f'(1) = -3 \to 3a + b = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = -2x^3 + 3x$$

19 **Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 2 \to 1 + a + b + c = 2$

$f''(1) = 0 \to 6 + 2a = 0$

$f'(2) = 0 \to 3 + 2a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a + b + c = 2 \\ 6 + 2a = 0 \\ 3 + 2a + b = 0 \end{array}\right\} \to a = -3,\ b = 3,\ c = 1$$

20 **Calcula los coeficientes a, b y c de la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, sabiendo que:**

a) La ecuación de la recta tangente a f en $x = 0$ es $y = x$.

b) Tiene un extremo relativo en el punto (–1, 0).

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Del apartado a) se deduce que pasa por el punto (0, 0) y que $f'(0) = 1$.

El apartado b) implica que $f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$f'(0) = 1 \to c = 1$

$f(-1) = 0 \to 1 - a + b - 1 = 0 \to -a + b = 0$

$f'(-1) = 0 \to -4 + 3a - 2b + 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} -a + b = 0 \\ -4 + 3a - 2b + 1 = 0 \end{array}\right\} \to a = 3,\ b = 3$$

21 **Halla a, b, c y d para que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4) y un mínimo relativo en el punto (2, 0).**

Las condiciones del problema implican que:

$f(0) = 4,\ f'(0) = 0,\ f(2) = 0,\ f'(2) = 0$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$d = 4$

$c = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 8a + 4b + 4 = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{array}\right\} \to a = 1,\ b = -3$$

22 **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$. Halla a, b, c y d.**

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1)=0 & \to & a+b+c+d=0 \\ f'(0)=2 & \to & c=2 \\ f'(1)=0 & \to & 3a+2b+c=0 \\ f'(2)=0 & \to & 12a+4b+c=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a+b+d=-2 \\ c=2 \\ 3a+2b=-2 \\ 6a+2b=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=\dfrac{1}{3} \\ b=\dfrac{-3}{2} \\ c=2 \\ d=\dfrac{-5}{6} \end{array}$$

Así: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}d$; $f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2)$

23 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$$\left.\begin{array}{lll} f''(1)=0 & \to & 12a+18b-6=0 \\ f''(1/2)=0 & \to & 3a+9b-6=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2a+3b-1=0 \\ a+3b-2=0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \to a = -1$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $3b - 3 = 0 \to b = 1$

24 **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en el punto $(2, 1)$. Calcula a, b y c.**

$y = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(-1)=0 & \to & -1+a-b+c=0 \\ f(2)=1 & \to & 8+4a+2b+c=1 \\ f''(2)=0 & \to & 12+2a=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a-b+c=1 \\ 4a+2b+c=-7 \\ a=-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-6 \\ b=\dfrac{10}{3} \\ c=\dfrac{31}{3} \end{array}$$

25 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1)=1 & \to & 1+a+b+c=1 \\ f'(1)=0 & \to & 3+2a+b=0 \\ f''(1)=0 & \to & 6+2a=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=-3 \\ b=3 \\ c=0 \end{array}\right\} \to f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

26 **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

Si la curva tiene un punto de inflexión en $x = 1$, debe ser $f''(1) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a \to f''(1) = 6\cdot 1 + 2a \to 6 + 2a = 0$

Si en $x = 1$ la tangente es horizontal, su pendiente será 0; y, por tanto, $f'(1) = 0$.