# EJERCICIOS. APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES.

**1.** Calcular el siguiente determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

**2.** Demostrar que si $A$ es una matriz $3\times3$ tal que $A^t = -A$, entonces $|A| = 0$. ¿Y si A es una matriz $n\times n$, se verifica lo anterior?

**3.** Sea A una matriz $5\times5$ tal que $|A| = 2$, calcular: $|5A|$; $|A^{-1}|$; $|A^2|$; $|A\cdot A^{-1}|$; $|A\cdot A^t|$; $\left|\left(A^t\right)^{-1}\right|$

**4.** Encontrar *a* y *b* para que los vectores $u_1 = (1,2,a,1)$, $u_2 = (a,1,2,3)$, $u_3 = (0,1,b,0)$ sean linealmente dependientes y determinar una relación de dependencia.

**5.** Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & a & 0 & b \end{pmatrix}$ según los valores de los parámetros a y b.

**6.** Resolver la ecuación $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ y comprobar el resultado.

**7.** Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$; calcular el valor de $|A^2|$, $|2AA^t|$, $\left|\left(A^t\right)^{-1}\right|$ y $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 3b & 3 & 0 \\ a+c & 2 & 8 \end{vmatrix}$

**8.** Hállese la dimensión y una base del subespacio vectorial de $R^4$ generado por los vectores $u_1 = (1,0,0,-1)$, $u_2 = (2,1,1,0)$, $u_3 = (1,1,1,1)$, $u_4 = (1,2,3,4)$ y $u_5 = (0,1,2,3)$

**9.** Demostrar que el subespacio generado por $\{u = (1,2,1)\ ;\ v = (1,3,2)\}$ es el mismo que el generado por $\{x = (1,1,0)\ ;\ w = (3,8,5)\}$

**10.** Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante:

$$A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b\end{pmatrix} \quad , \qquad B=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1+a & 1\\ 1 & 1-a\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1+b & 1\\ 1 & 1-b\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

**11.** Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & \lambda\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ $y$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ \lambda & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de $\lambda$ para los que $A\cdot B$ es invertible.

b) Determinar los valores de $\lambda$ para los que existe $(B\cdot A)^{-1}$.

c) Calcular $(B\cdot A)^{-1}$ para $\lambda=-2$.

**12.** En el espacio vectorial $P_2$ de los polinomios de grado menor o igual que 2, se considera el siguiente subconjunto: $A=\{p(x)\in P_2 \,/\, p(1)=p(2)=0\}$. ¿*A* es subespacio vectorial de $P_2$? En caso afirmativo determinar su dimensión.

**13.** Si el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & k & 9\\ 1 & -1 & -6 & 5\end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\vec{F}_1,\vec{F}_2\ y\,\vec{F}_3$ así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\vec{C}_1,\vec{C}_2,\vec{C}_3\ y\ \vec{C}_4$.

**14.** Probar si el sistema de vectores $S=\{a_1=(1,1,1);a_2=(1,0,1);a_3=(3,2,1)\}$ es base de $\Re^3$ y en caso afirmativo calcular las coordenadas de $u=(1,2,3)$ en esta base.

**15.** Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x & a & a & 0\\ x & 0 & b & 0\\ x & 0 & 0 & c\end{vmatrix}=0$

**16.** Calcular el rango de la matriz *A* según los valores del parámetro $\lambda$: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ \lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ 4 & 2 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$

**17.** Sin desarrollar, probar que $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+c \end{vmatrix} = 0$

**18.** Sin desarrollar, probar que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$

**19.** Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 3 & 2x+1 & x^2+2x & 3x^2 \\ 3 & x+2 & 2x+1 & 3x \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

**20.** Encontrar los valores de $\lambda$ para los que la matriz A = $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es invertible. Para $\lambda$=2, calcular la inversa de A y comprobar el resultado.

**21.** Utilizando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$.

**22.** Dados los vectores $e_1 = (a, 1+a, 2a)$ , $e_2 = (a, 1, a)$ $y$ $e_3 = (1, a, 1)$ , se pide:

a) determinar los valores de $a$, para los que los vectores $e_1$, $e_2$ $y$ $e_3$ son linealmente dependientes.

b) estudiar si el vector $u = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $e_1$, $e_2$ $y$ $e_3$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

**23.** Considérese el subespacio vectorial $H \subseteq \mathbb{R}^3$ generado por los vectores $u_1 = (-2, 1, 1)$, $u_2 = (1, -4, 5)$, $u_3 = (-4, -5, 13)$. Averiguar si alguno de los vectores $x = (2, 0, 4)$, $y = (1, -11, 16)$ pertenece a $H$.

**24.** Demostrar, utilizando las propiedades de los determinantes, que

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(a+c)(b+c)$$

**25.** Resolver el siguiente determinante $\begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$

**26.** Calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1-a & a & a & a & a \\ a & 1-a & a & a & a \\ a & a & 1-a & a & a \\ a & a & a & 1-a & a \\ a & a & a & a & 1-a \end{vmatrix}$$

**27.** Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-a-c & 2b \\ 2c & 2c & c-b-a \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

**28.** Calcular para qué valor, o valores, de $x$ admite inversa la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ x & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y hallar $A^{-1}$ para $x$ =3.

**29.** Sea A una matriz $4 \times 4$ tal que $|A| = -2$, calcula, justificando la respuesta:

$|3A|$; $|-A^{-1}|$; $|A^4|$; $|2A \cdot A^{-1}|$; $|A \cdot A^t|$; $\left|\left(A^t\right)^{-1}\right|$; $\left|\left(A^{-1}\right)^t\right|$

**30.** Demostrar que si A es una matriz $3 \times 3$ tal que $A^t = -A$, entonces $|A| = 0$. ¿Y si A es una matriz $n \times n$, se verifica lo anterior?

**31.** Resolver la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} = 0$

**32.** Calcular el rango de la matriz $A$, según los diferentes valores del parámetro $t \in \mathbb{R}$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ -2t-1 & 0 & t+3 \end{pmatrix}$$

Indicar para qué valores de $t \in \mathbb{R}$ no existe la matriz inversa de $A$ y en caso de ser posible calcular $A^{-1}$ para $t = -1$.

**33.** Si $A$ es cualquier matriz con $n$ filas y $n$ columnas tal que $A^3 = -A - I$ y se sabe que $\det(A) = m$, calcular el valor de $\det(A + I)$ en función de $m$.

**34.** Estudiar el rango de la matriz $A$ según los valores de los parámetros $a$ y $b$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{pmatrix}$$

**35.** Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix} = 0$

**36.** Resolver la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -1 & 3 & 2 \\ x^2 & 1 & 9 & 4 \\ x^3 & -1 & 27 & 8 \end{vmatrix} = 0$

**37.** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$, dedúzcase cuándo A **no** tiene inversa.

**38.** Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 2 & x & 2 & 2 \\ 3 & 5 & x & 3 \\ 4 & 4 & 4 & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

**39.** Calcular el rango de la matriz $A$ según los valores del parámetro $\lambda$ : $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

**40.** Probar, aplicando las propiedades de los determinantes, la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ p+q & q+r & r+p \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

**41.** Sea el siguiente determinante:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

- ¿Figurará el producto $a_{11}a_{32}a_{23}a_{54}a_{45}$ en el desarrollo del determinante D?. ¿Con qué signo?
- Igual para el producto $a_{11}a_{32}a_{43}a_{34}a_{55}$
- Escribir dos productos que en el desarrollo del determinante D aparezcan con signo positivo y otros dos con signo negativo.