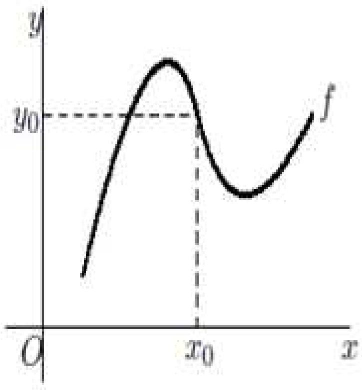
FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

Definición

Se llama **función real de una variable real** a cualquier aplicación $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $x \in D$ uno y sólo un valor $f(x) \in \mathbb{R}$. La función se suele representar por $y = f(x)$ donde x se llama **variable independiente** e y se llama **variable dependiente**.

ta real sin las

Si $f(x_0) = y_0$, se suele decir que y_0 es la **imagen** de x_0 por la función f, o que x_0 es un **origen** de y_0. La representación en el plano cartesiano de todos estos pares ordenados (x_0, y_0) se llama **gráfica** de la función f.



La gráfica de la función $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ es:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \, : \, x \in D\}$$

DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

2.1.2. Ejemplos

1. El dominio de la función $y = x^2 - 1$ es $D = \mathbb{R}$, y la image $I = [-1, +\infty)$.
2. El dominio de la función $y = \sqrt{x}$ es $D = [0, +\infty)$, y la imagen es también $I = [0, +\infty)$.
3. Al estar especificado, el dominio de la función:

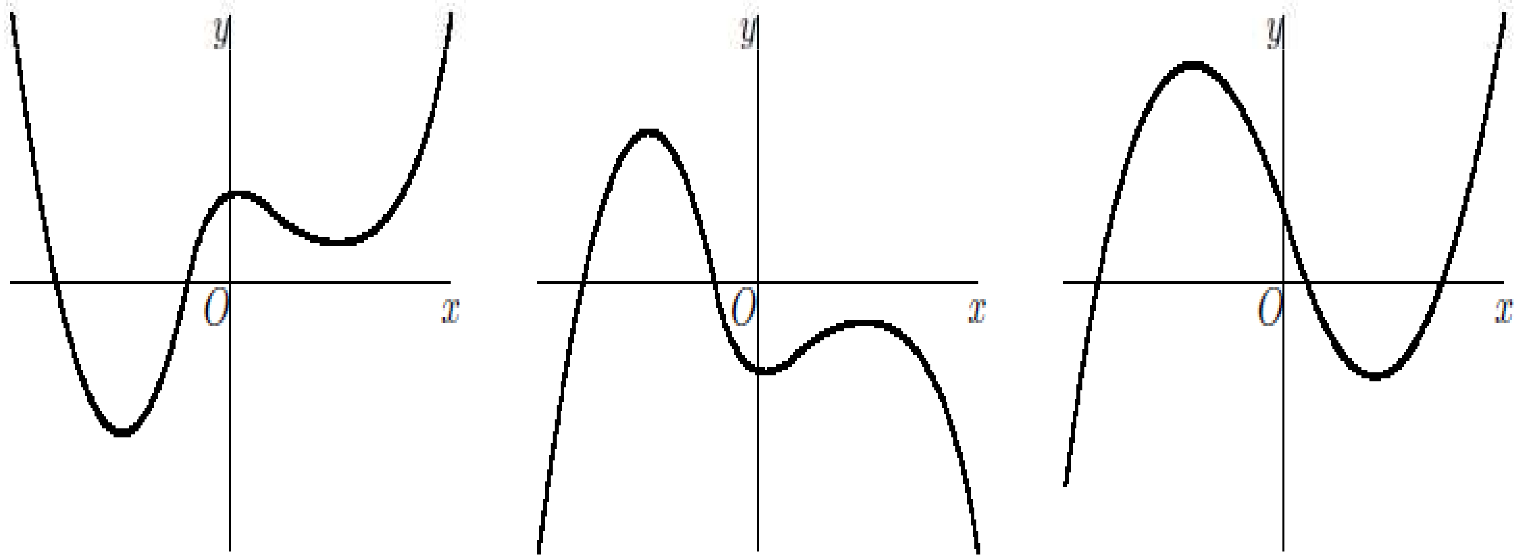
$$f(x) = 2x - 1\ ,\ \ 0 < x \leq 3$$

es $D(f) = (0, 3]$, y la imagen $I(f) = (-1, 5]$.

FUNCIONES POLINÓMICAS

El grado de la función polinómica es el grado del polinomio.

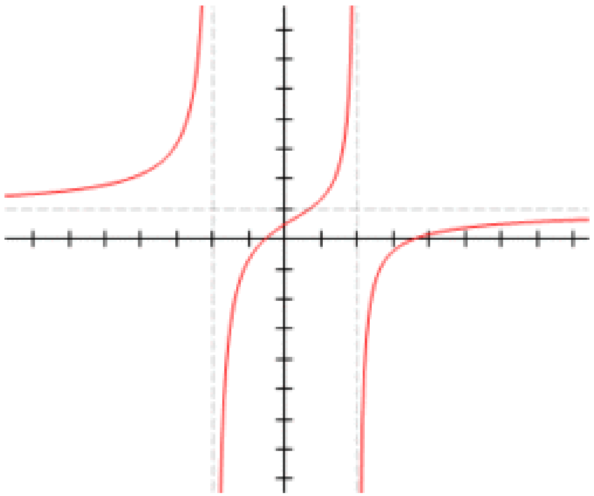
El dominio de las funciones polinómicas es toda la recta real y no están acotadas si su grado es distinto de cero: las funciones polinómicas de grado impar no están acotadas ni superior ni inferiormente, y las de grado par o bien están acotadas inferiormente y no superiormente, o viceversa.

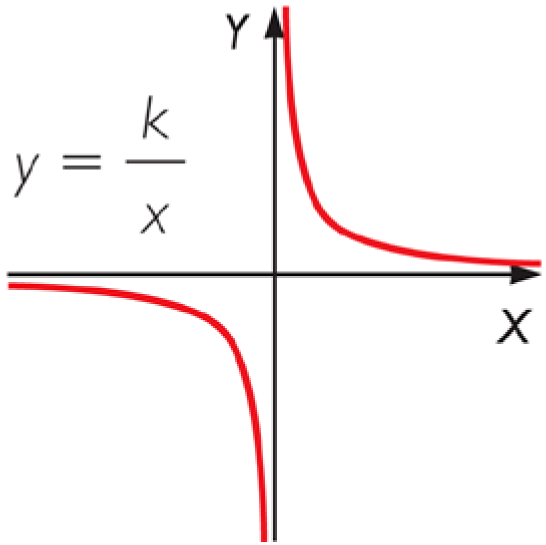


FUNCIONES RACIONALES

Una **función racional** es el cociente entre dos funciones polinómicas. Su dominio es la recta real sin las raíces del denominador.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$$



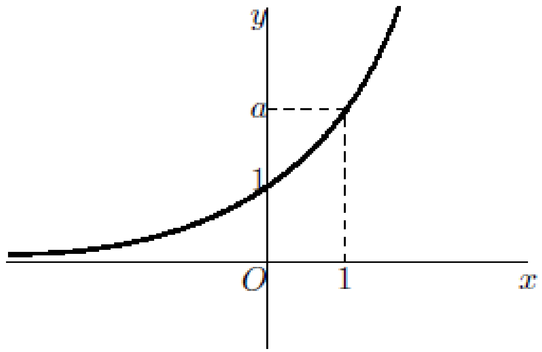


FUNCIONES EXPONENCIALES

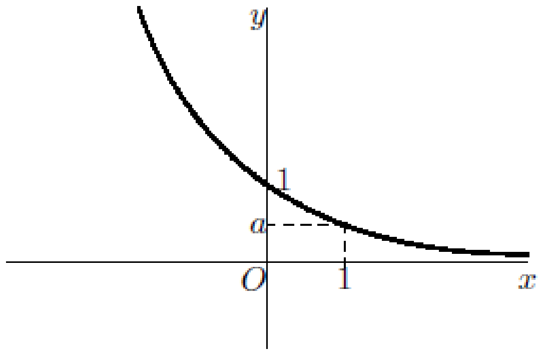
Se llama **función exponencial** a la función:

$$f(x) = a^x \qquad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

Su dominio es toda la recta real y su imagen los números reales positivos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $I(f) = (0, +\infty)$.
La función exponencial es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.



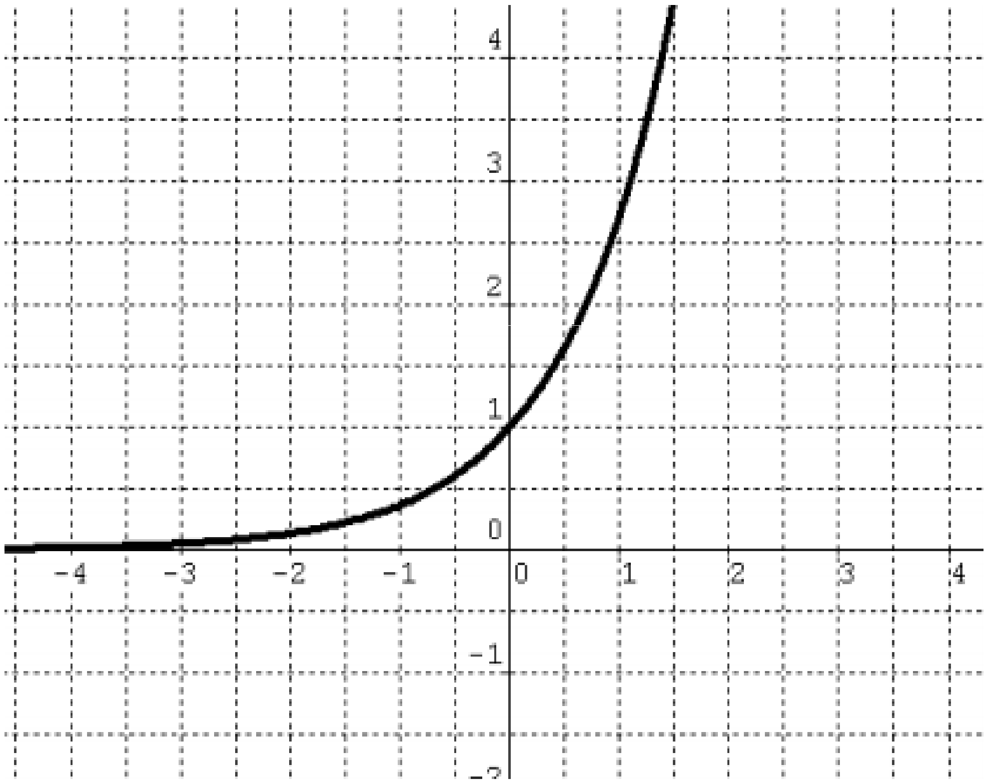
Función exponencial $y = a^x$ con $a > 1$.



Función exponencial $y = a^x$ con $0 < a < 1$.

FUNCIONES EXPONENCIALES

$$y = e^x$$

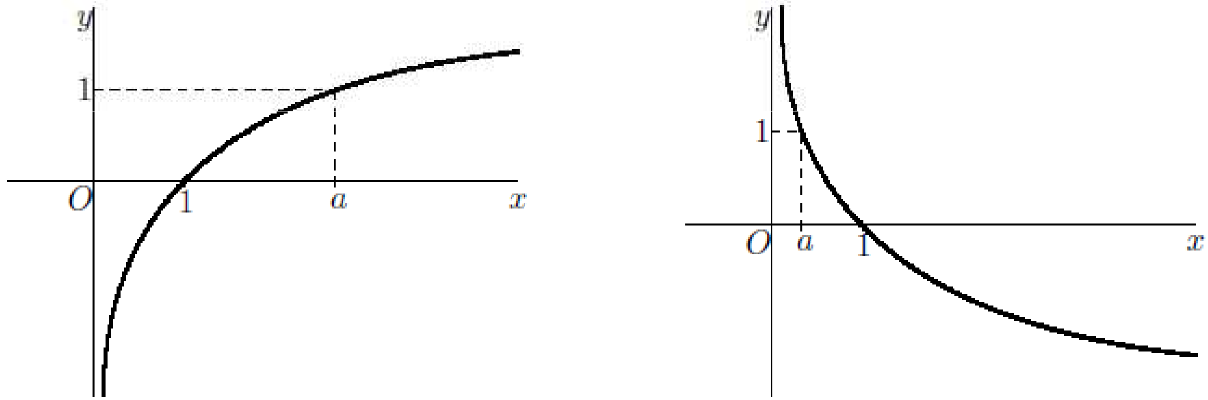


FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Se llama **función logarítmica** a la función inversa de la función exponencial, y se representa por:

$$f(x) = \log_a x \qquad \text{con } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

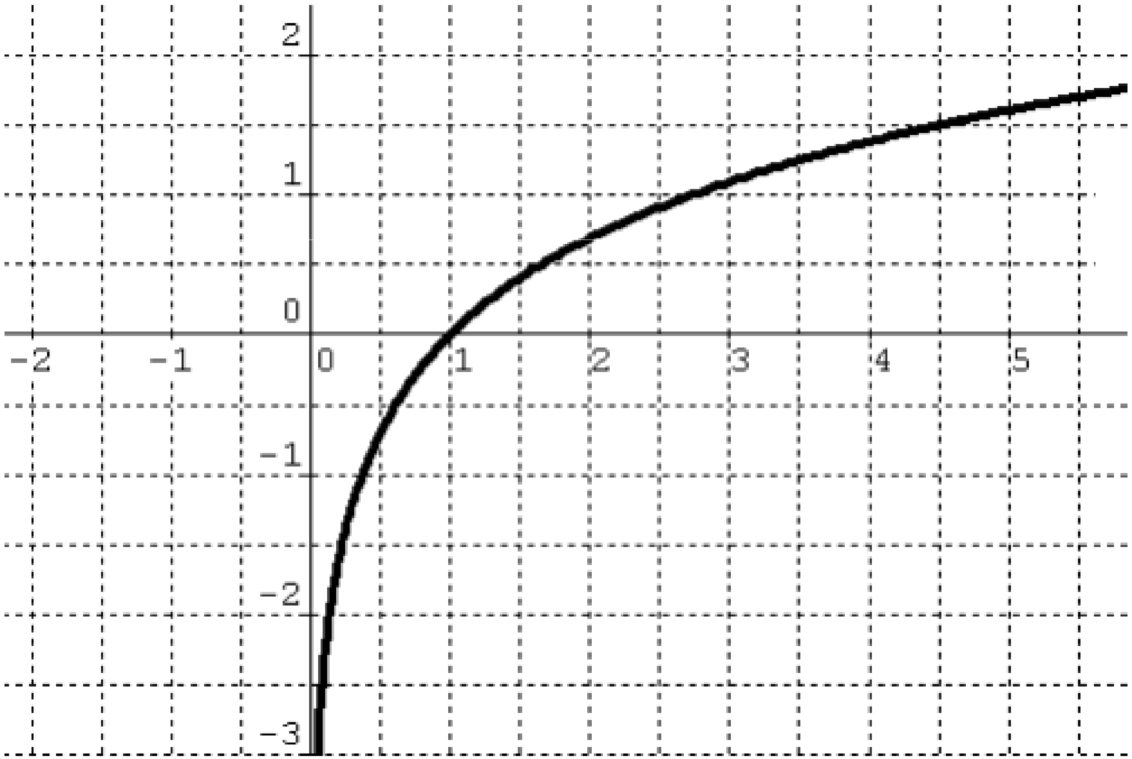
Su dominio e imagen son, respectivamente, la imagen y el dominio de la función exponencial, es decir: $D(f) = (0, +\infty)$ e $I(f) = \mathbb{R}$. La función logarítmica es creciente si $a > 1$, y es decreciente si $0 < a < 1$.



FUNCIONES LOGARÍMICAS:

logaritmo neperiano : base e

F(x)= ln x



$$y = \ln x$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función seno: La función $f(x) = \sin x$ verifica las siguientes propiedades:

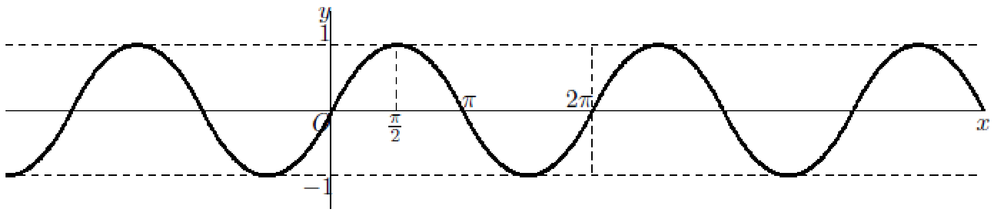
- Su dominio es toda la recta real: $D = \mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $I = [-1, 1]$ y, por tanto, es una función acotada.
- Es una función impar y, por tanto, su gráfica es simétrica respecto del origen:

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$$

- Es periódica de periodo 2π:

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$$

Su representación gráfica es:



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función coseno: La función $f(x) = \cos x$ verifica las siguientes propiedades:

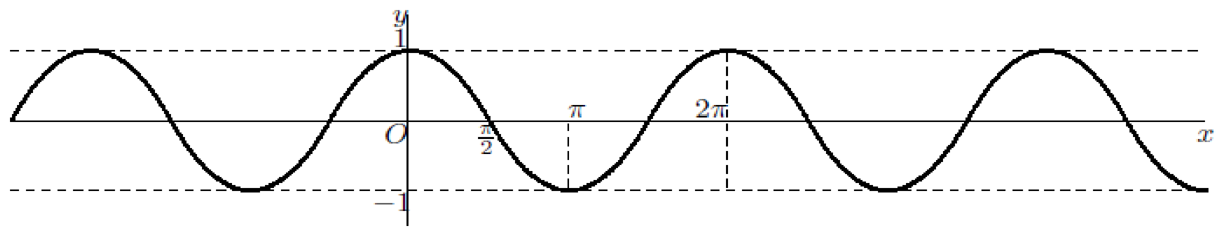
- Su dominio es toda la recta real: $D = \mathbb{R}$.
- Su imagen es el intervalo $I = [-1, 1]$ y, por tanto, es una función acotada.
- Es una función par y, por tanto, su gráfica es simétrica respecto del eje de ordenadas:

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$$

- Es periódica de periodo 2π:

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos x = f(x)$$

Su representación gráfica es:



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Funciones tangente y cotangente: Se definen a partir del seno y coseno como:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad\qquad f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Verifican las siguientes propiedades:

- Su dominio es:

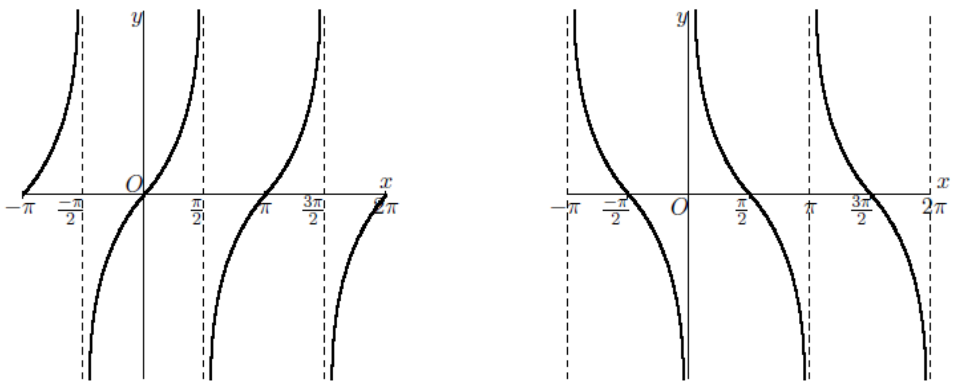
$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{x\,:\,\cos x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,:\,k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{x\,:\,\sin x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\,:\,k \in \mathbb{Z}\}$$

- La imagen de ambas es $I = \mathbb{R}$ y, por tanto, son funciones no acotadas.
- Las dos funciones son impares y, por tanto, sus gráficas son simétricas respecto del origen.

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x \qquad \text{y, análogamente:} \quad \cot(-x) = -\cot x$$

- Son periódicas de periodo π:

Su representación gráfica es:



Función tangente

Función cotangente

FUNCIONES COSECANTE Y SECANTE

Funciones secante y cosecante: Se definen a partir del seno y coseno como:

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad\qquad f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Verifican las siguientes propiedades:

- Su dominio es:

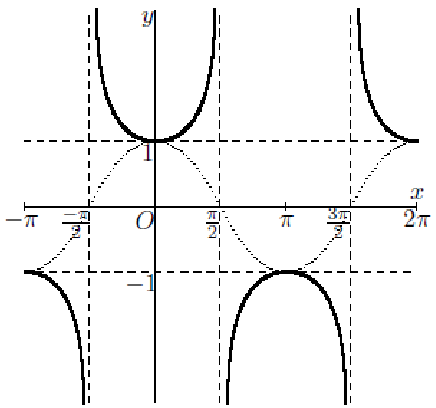
$$D(\sec) = \mathbb{R} \setminus \{x \,:\, \cos x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$
$$D(\csc) = \mathbb{R} \setminus \{x \,:\, \sin x = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$

- La imagen de ambas es $I = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ y, por tanto, son funciones no acotadas.
- La función secante es par y la cosecante impar.

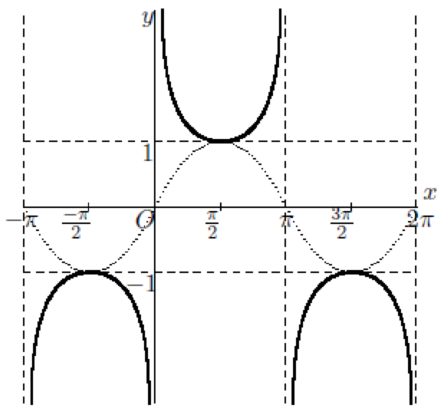
$$\sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \qquad\qquad \csc(-x) = \frac{1}{\sin(-x)} = \frac{1}{-\sin x} = -\csc x$$

- Son periódicas de periodo 2π:

Su representación gráfica es:



Función secante



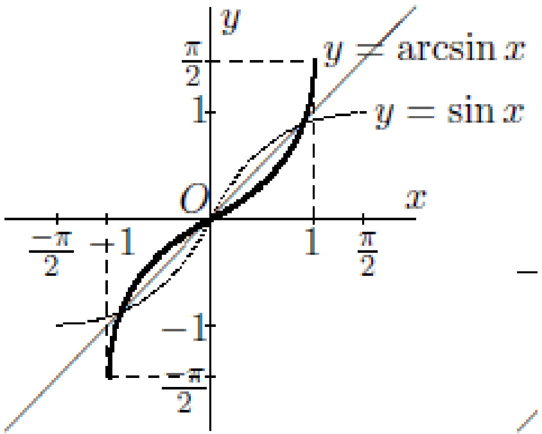
Función cosecante

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Función arcoseno: Es la función inversa de la función seno restringida al dominio $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{cases} y = \sin x \\ D(\sin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ I(\sin) = [-1, 1] \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{Función inversa}}{\longrightarrow} \longrightarrow \begin{cases} y = \arcsin x \\ D(\arcsin) = [-1, 1] \\ I(\arcsin) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Es decir, para cada $x \in [-1, 1]$ se define su arcoseno como el único $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\sin y = x$.
La función arcoseno es impar y acotada.

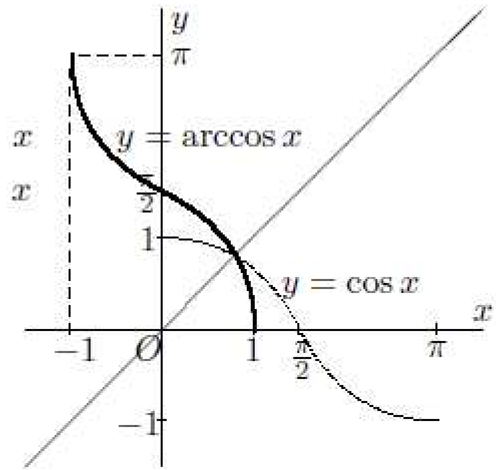


FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Función arcocoseno: Es la función inversa de la función coseno restringida al dominio $D = [0, \pi]$.

$$\begin{cases} y = \cos x \\ D(\cos) = [0, \pi] \\ I(\cos) = [-1, 1] \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{Función inversa}}{\longrightarrow} \longrightarrow \begin{cases} y = \arccos x \\ D(\arccos) = [-1, 1] \\ I(\arccos) = [0, \pi] \end{cases}$$

Es decir, para cada $x \in [-1, 1]$ se define su arcocoseno como el único $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$.
La función arcocoseno es acotada, y no es par ni impar.



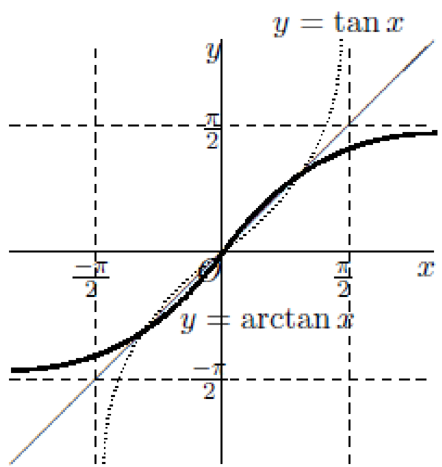
Función arcocoseno

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS (RECÍPROCAS)

Función arcotangente: Es la función inversa de la función tangente restringida al dominio $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{cases} y = \tan x \\ D(\tan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ I(\tan) = \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow \underset{\text{Función inversa}}{\longrightarrow} \longrightarrow \begin{cases} y = \arctan x \\ D(\arctan) = \mathbb{R} \\ I(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ se define su arcotangente como el único $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\tan y = x$.
La función arcotangente es impar y acotada.



Función arcotangente