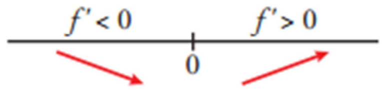
TEMA 9 _Ejerc_libro –Anaya + límites aplicando LHôpital

10) Halla los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

e) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

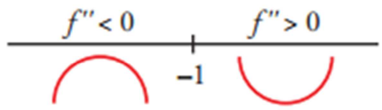
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x) $\rightarrow\; y = 1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \dfrac{-2}{e}$

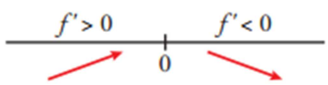


Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \dfrac{-2}{e}\right)$.

10f) Halla la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de inflexión

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

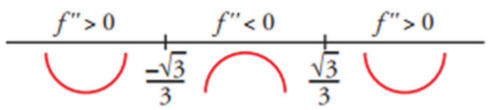
$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -2x = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \;\rightarrow\; y = 1$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 + 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \;\rightarrow\; y = \frac{3}{4}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{3}{4}\right)$.

13) Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa x = 1:

d) $y = -3 + 2(x-1)^5$

d) • Máximos y mínimos: buscamos los puntos en los que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 10(x-1)^4 \rightarrow 10(x-1)^4 = 0 \rightarrow x = 1,\ f(1) = -3$

Como $f'(x) = 10(x-1)^4 \geq 0$, la función es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos.

Estudiamos el signo de $f''(x) = 40(x-1)^3$:

$f'' < 0$ | 1 | $f'' > 0$

La función es convexa a la izquierda de $x = 1$ y cóncava a su derecha.

Hay un punto de inflexión en $(1, -3)$.

11) Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y los mínimos de las siguientes funciones:

e) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$

e) $y = \dfrac{x^2-1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2xx-(x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2-x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-1}{x} = 0$. No tiene solución.

Signo de la derivada:

$f' > 0$ | 0 | $f' > 0$

La función es creciente en todo su dominio.

19 **Halla una función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1, 2)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 2 \rightarrow 1 + a + b + c = 2$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6 + 2a = 0$

$f'(2) = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 1+a+b+c=2 \\ 6+2a=0 \\ 3+2a+b=0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -3,\ b = 3,\ c = 1$$

15 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x-1 & \text{si } x \le 1 \\ 4x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2+7x-4 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2+3x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

a) Comprueba que son derivables en $\mathbb{R}$.

b) Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus máximos y mínimos.

Ambas funciones son continuas y derivables salvo quizás en los puntos donde se separan los trozos porque están definidas por intervalos mediante funciones polinómicas.

a) Estudiamos el punto $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2+2x-1) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (4x-2) = 2 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1) \rightarrow \text{Es continua también en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1 \end{cases} \rightarrow f'(1^-) = 4 = f'(1^+) \rightarrow \text{Es derivable en } x = 1.$$

b) En el caso de $f(x)$:

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$ (pertenece al intervalo de definición)

$x = -1,\ y = -2,\ f''(-1) > 0 \rightarrow$ El punto $(-1, -2)$ es un mínimo relativo.