28 **a) Calcula los valores de los parámetros a y b para que sea derivable la función:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Halla sus extremos relativos en el caso $a = -2$, $b = 1$.

a) La función está definida por intervalos mediante funciones continuas y derivables. Solo nos queda estudiar el punto $x = 0$. Veamos la continuidad de la función:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1-x}{e^x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + ax + b) = b \end{cases} \to b = 1$$

Para el valor obtenido de b la función es continua porque $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \to f'(0^-) = -2 \\ 2x + a & \text{si } x > 0 \to f'(0^+) = a \end{cases} \to a = -2 \text{ para que sea derivable en } x = 0.$$

Si $a = -2$ y $b = 1$ la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

b) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \to \begin{cases} \dfrac{x-2}{e^x} = 0 \to x = 2 \text{ (no vale)} \\ 2x - 2 = 0 \to x = 1 \end{cases}$$

Estudiando el signo de la primera derivada en las proximidades de $x = 1$, obtenemos que el punto $(1, 0)$ es un mínimo relativo.

46 **La velocidad de una partícula en m/s, viene dada por la función $v(t) = (t^2 + 2t)e^{-t}$ con $t \geq 0$.**

a) ¿En qué instante del intervalo [0, 3] se alcanza la velocidad máxima?

b) Calcula $\lim_{x \to +\infty} v(t)$ e interpreta el resultado.

a) $v'(t) = (2 - t^2)e^{-t}$

$v'(t) = 0 \rightarrow (2 - t^2)e^{-t} = 0 \rightarrow t = \sqrt{2} \in [0, 3]$

Estudiando los signos de $v'(t)$ a ambos lados de $\sqrt{2}$ podemos comprobar que en $t = \sqrt{2}$ hay un máximo relativo. La velocidad no puede ser mayor en los extremos 0 y 3 debido a la forma en que la función crece y decrece.

b) $\lim_{x \to +\infty} (t^2 + 2t)e^{-t} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{t^2 + 2t}{e^t} = 0$

Este resultado combinado con el apartado anterior nos indica que a partir del instante $\sqrt{2}$ la velocidad de la partícula disminuye tendiendo a pararse cuando el tiempo aumenta.

66 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $[0, 3\sqrt{2}]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in (0, 3\sqrt{2})$ para el que $f'(c) = 0$.**

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$: por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego verifica la hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{6} \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

67 **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]? En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.**

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en [0, 4] y derivable en (0, 4); luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en [0, 4].

Veamos en que punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = -1 \rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$

68 **Se tiene la función:** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$

Prueba que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$

Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

- Si $x \ne -1 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.
- Si $x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = -1 \\ f(1) = -1 \end{array}\right\} f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$.

Veamos que $f(x)$ es derivable en $[-2, 0]$:

- Si $x \ne -1$ y $x \in (-2, 0)$, f es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

- En $x = -1$, tenemos que:

$$f'(-1^-) = f'(-1^+)$$

Por tanto, $f(x)$ es derivable en $(-2, 0)$.

Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \le -1 \\ x & \text{si } -1 \le x < 0 \end{cases}$$

Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$, existe algún punto, $c \in (-2, 0)$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \dfrac{-1}{2}$.