Producto vectorial

Definición

El producto vectorial de dos vectores libres , $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector que se designa por $\vec{u} \times \vec{v}$, se define del siguiente modo:

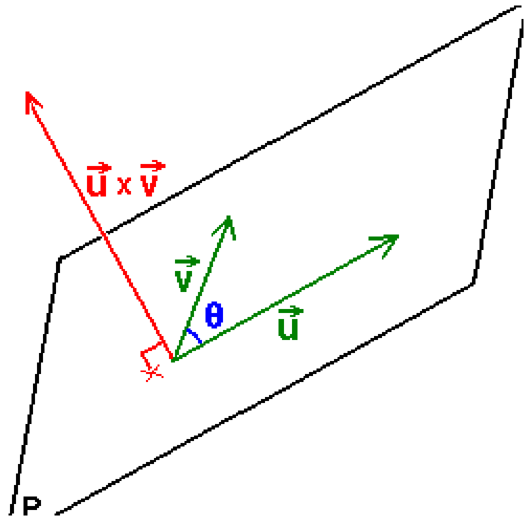
1. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulos, y no proporcionales, $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector caracterizado por: **(linealmente independientes)**

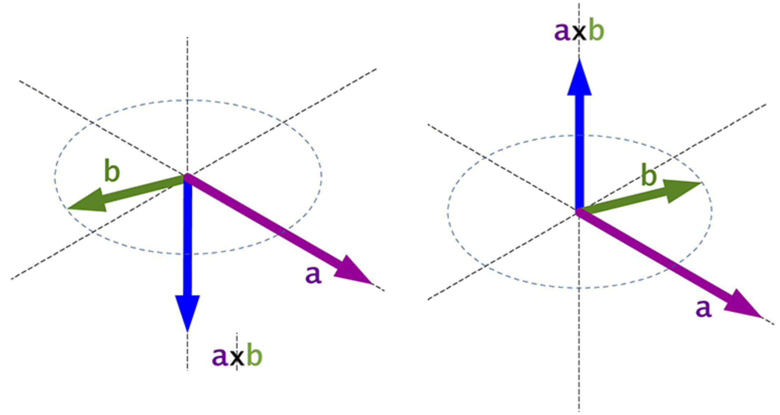
   - Módulo: $\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right| \ \left|\vec{v}\right| \ \text{sen}\left(\vec{u}\,,\vec{v}\right)$

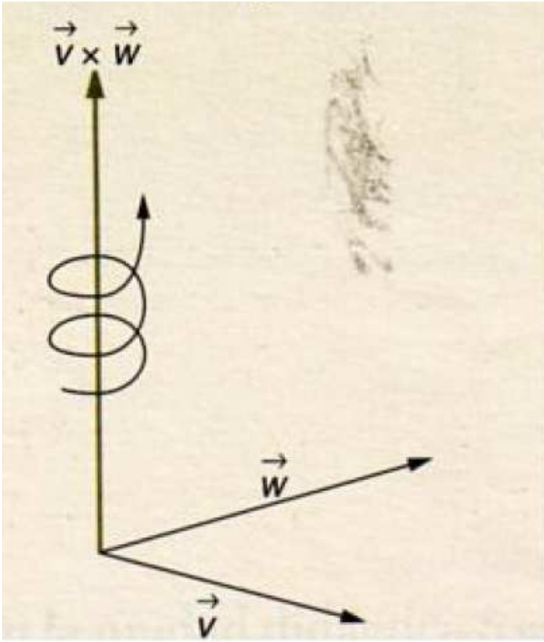
   - Dirección: La de la recta perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ver figura.

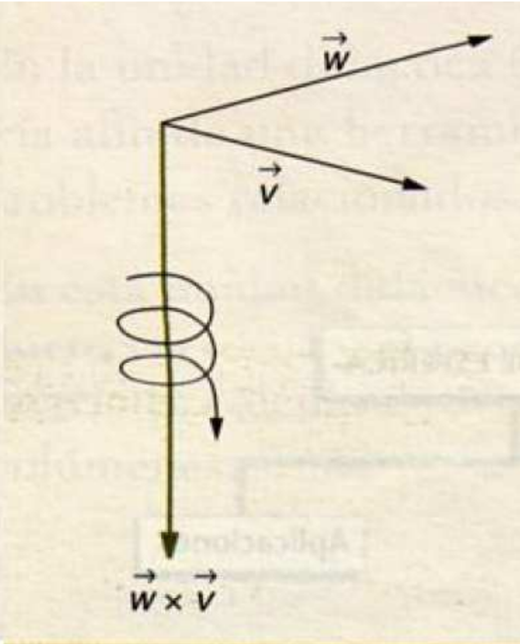
   - Sentido: El de avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

2. $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ si: $\begin{cases} \vec{u} = 0 \\ \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son proporcionales.} \end{cases}$ **(linealmente dependientes)**






$\vec{v} \times \vec{w}$
$\vec{w}$
$\vec{v}$


$\vec{w}$
$\vec{v}$
$\vec{w} \times \vec{v}$

Propiedades del producto vectorial entre vectores

Sean **u**, **v** y **w** tres vectores de R^3 y sea $\alpha \in R$, entonces:

1. El producto vectorial es *anticonmutativo*: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. El producto vectorial de vectores paralelos es el vector nulo: Si $\mathbf{u} // \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
3. *Consecuencia propiedad* (2): $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
4. Si uno de los vectores del producto vectorial es el vector nulo entonces el producto vectorial es el vector nulo: $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores (a derecha y a izquierda) teniendo en cuenta la anticonmutatividad de la operación:

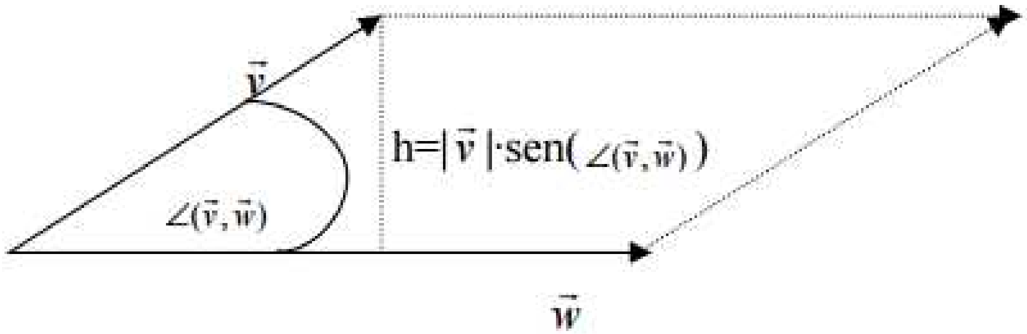
   $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$

   $(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \mathbf{w} \times \mathbf{u}$
6. Extracción de un escalar del producto vectorial: $(\alpha \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\alpha \mathbf{v}) = \alpha (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

7.- $\boxed{\text{No es asociativo : } (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})}$

2.2. Interpretación geométrica del producto vectorial

Sean dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ con origen común. Si trasladamos el vector $\vec{w}$ sobre el extremo de $\vec{v}$ y el de $\vec{v}$ sobre el extremo de $\vec{w}$ se forma un paralelogramo (ver figura)



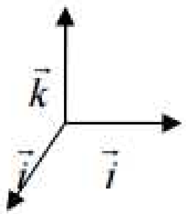
El área del paralelogramo es | $\vec{w}$ |·h siendo h=| $\vec{v}$ |·sen($\angle(\vec{v},\vec{w})$). Así el área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo forman

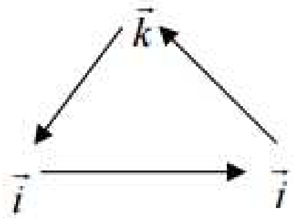
$$\boxed{A_{paralelogramos} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen(\angle(\vec{v},\vec{w})) = |\vec{v} \times \vec{w}|}$$

2.3. Expresión analítica del producto vectorial

Para calcular la expresión analítica del producto vectorial veamos el producto vectorial de los vectores unitarios:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$$
$$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \qquad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$$





Componentes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$

Producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

3. Producto Mixto de 3 vectores.

3.1. Definición

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es un valor numérico definido a partir del producto vectorial y escalar.

Definición: El producto mixto de 3 vectores, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ que se designa como $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, se obtiene del producto escalar del primer vector por el vector resultante de multiplicar vectorialmente los otros dos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Propiedades del producto mixto:

- Si permutamos dos vectores del producto mixto este cambia de signo:

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$

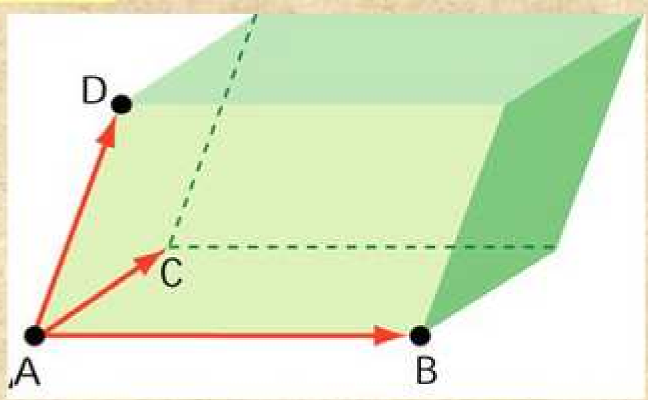
- El producto mixto es distributivo respecto a la suma de vectores:

  $[\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w} =] [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si algún vector es nulo o son coplanarios (linealmente dependientes).

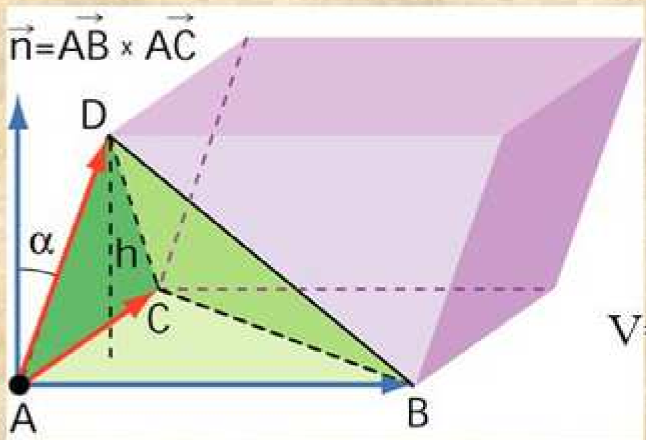
Volumen de paralelepípedos y tetraedros

Paralelepípedo



$$V = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$

Tetraedro



Por ser una pirámide: $V = (1/3) \cdot \text{base} \cdot \text{altura}$

$$\text{Base} = S(ABC) = \frac{1}{2}\ |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$\text{Altura} = h = |\overrightarrow{AD}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AD}, \vec{h}})$$ Por tanto:

$$V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})| = \frac{1}{6}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$$