Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$a)\ \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}dx$ $\qquad$ $b)\ \int \frac{x}{x^4+16}dx$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-3e^{x}+2}\cdot e^x dx = \int \frac{t^2}{t^2-3t+2}dt = \int\left(1+\frac{3t-2}{t^2-3t+2}\right)dt = \int dt + \int \frac{3t-2}{t^2-3t+2}dt =$$

cambio $\uparrow$: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$; $\qquad$ *dividiendo* $\uparrow$

$$* = \int dt + \int\left(\frac{-1}{t-1}+\frac{4}{t-2}\right)dt = \int dt - \int \frac{1}{t-1}dt + 4\int \frac{1}{t-2}dt = t - \ln|t-1| + 4\ln|t-2| = e^x - \ln\left|e^x-1\right| + 4\ln\left|e^x-2\right|$$

deshaciendo el cambio $\uparrow$

$$* \ \frac{3t-2}{t^2-3t+2} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2} = \frac{A(t-2)+B(t-1)}{t^2-3t+2} \Rightarrow 3t-2 = A(t-2)+B(t-1) \Rightarrow \begin{cases} si \quad t=2 \Rightarrow 4=B \\ si \quad t=1 \Rightarrow 1=-A \Rightarrow A=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x}{x^4+16}dx = \int \frac{x}{16\left(1+\frac{x^4}{16}\right)}dx = \frac{1}{16}\int \frac{x}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{x/2}{1+\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}dx = \frac{1}{8}arctg\left(\frac{x^2}{4}\right)+C$$

$\uparrow$ *tiene todo el aspecto de una integral del tipo arcotangente*

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 4 puntos)

Esboza la gráfica de la función: $f(x) = x\ln x$,y calcula el área del recinto plano encerrado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=e$.

Comenzamos representando la función:

$f(x) = x\ln x \ \Rightarrow\ Dom\ f = (0\ ,+\infty)$

Cortes con eje OX : $\ x\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1\ ,0)$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{1/x}\right) = (L'Hôpital) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{-x}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}(x\cdot\ln x) = +\infty$$

$$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\ \Rightarrow\ f'(x)=1+\ln x\ ;\quad f'(x)=0\ \Rightarrow\ \ln x=-1\ \Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

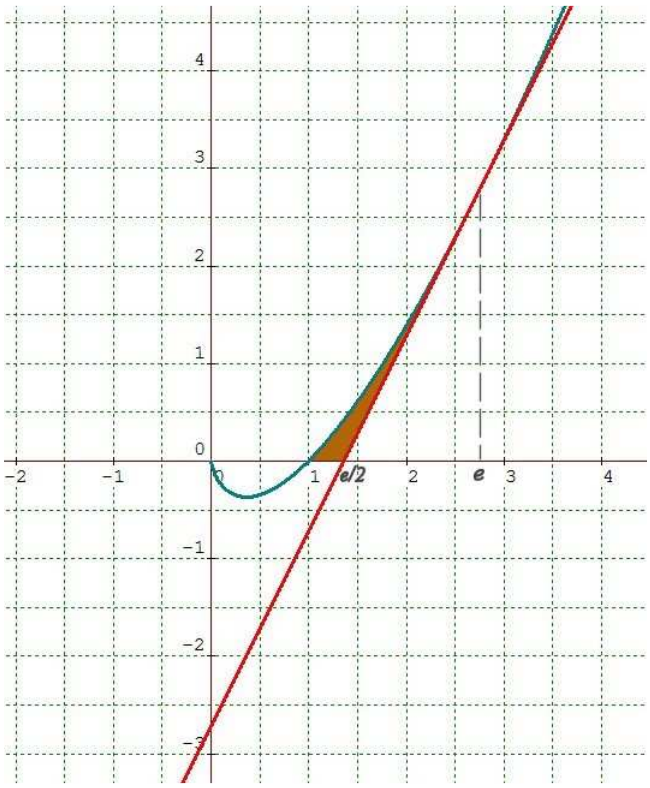
$$f''(x)=\frac{1}{x}\ ;\quad f''\left(\frac{1}{e}\right)>0\ \Rightarrow\ \text{en el punto}\left(\frac{1}{e},-\frac{1}{e}\right)\text{ la función tiene un mínimo.}$$

No hay puntos de inflexión.

Calculamos la recta tangente a $f(x)$ *en el punto* $x=e$

$$m=f'(e)=1+\ln e\ ;\quad m=2.\ \text{Punto de tangencia } (e,e)\ \Rightarrow\ r_{tg}\equiv y-e=2(x-e)\ \Rightarrow\ r_{tg}\equiv y=2x-e$$

Dibujamos la función y la recta tangente y coloreamos la región de la que nos piden el área.



La función $f(x)$ *y la recta* $y=2x-e$ *se cortan en* $x=e$

Corte de la recta con eje OX : $2x-e=0\Rightarrow\ x=\frac{e}{2}$

Entonces el área de la región coloreada será :

$$A=\int_1^e x\ln x\,dx-\int_{e/2}^{e}(2x-e)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^e-\left[x^2-ex\right]_{e/2}^{e}=$$

$$=\left[\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right]-\left[e^2-e^2-\frac{e^2}{4}+\frac{e^2}{2}\right]=\frac{1}{4}\text{ unidades cuadradas}$$

$$\int x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}$$

$$\left\{\begin{array}{l} u=\ln x\ \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x\,dx\ \Rightarrow v=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\end{array}\right.$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 1,5 puntos)

¿Es cierto que $1+sen^2x$ y $\dfrac{-\cos 2x}{2}$ son primitivas de una misma función? ¿De cúal?

Para que $F(x)=1+sen^2x$ *y* $G(x)=\dfrac{-\cos 2x}{2}$ *sean primitivas de una misma función, debe cumplirse* $F'(x)=G'(x)$

$$\left.\begin{array}{l} F'(x)=2sen\,x\cos x=sen2x \\ G'(x)=\frac{1}{2}(sen2x)\cdot 2=sen2x\end{array}\right\}\Rightarrow F'(x)=G'(x)\Rightarrow\ F(x)\text{ y }G(x)\text{ son primitivas de la función } f(x)=sen2x$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 1,5 puntos)

Calcula: $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \int \frac{t}{t^2+1}\cdot 2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{1+t^2}dt = 2t - 2arctg\left(t\right) = 2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}$$

$$\nwarrow cambio: x = t^2 \;;\; dx = 2t\,dt$$

$$Entonces: \int_0^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = \left[2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}\right]_0^3 = \left(2\sqrt{3}-2arctg\sqrt{3}\right)-\left(0-0\right) = 2\sqrt{3}-2\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{3}$$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina la función $f\left(x\right)$, sabiendo que pasa por el punto $\left(1,-2\right)$ y que $f'\left(x\right) = x\cos\left(1-x^2\right)$

La función $f\left(x\right)$ será una primitiva de $f'\left(x\right)$

$$\int x\cos\left(1-x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\int -2x\cos\left(1-x^2\right)dx = -\frac{1}{2}sen\left(1-x^2\right)+C$$

$$sen\left(1-x^2\right) \underset{\int}{\overset{d}{\rightleftarrows}} -2x\cos\left(1-x^2\right)dx$$

$$por\ tanto\ f\left(x\right) = -\frac{1}{2}sen\left(1-x^2\right)+C \quad y\ como\ sabemos\ que\ f\ pasa\ por\ \left(1,-2\right) \Rightarrow f\left(1\right) = -2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}sen\left(0\right)+C = -2 \Rightarrow C = -2 \quad y\ f\left(x\right) = -\frac{1}{2}sen\left(1-x^2\right)-2$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea $f\left(x\right) = \begin{cases} \left(x-1\right)^2 & si\ \ x\le 1 \\ \ln x & si\ \ x>1 \end{cases}$, hallar el área limitada por la gráfica de $f\left(x\right)$, y por la recta $y=1$.

Comenzamos representando la gráfica de la función f:

$f\left(x\right)$ es una función definida a trozos que es continua.

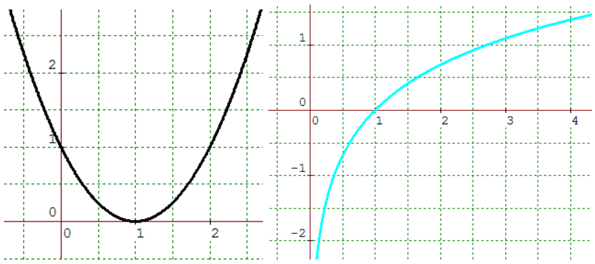
** en el intervalo $\left(-\infty, 1\right]$ tenemos la parábola $y = \left(x-1\right)^2$, que tiene su vértice en el punto $\left(1,0\right)$*

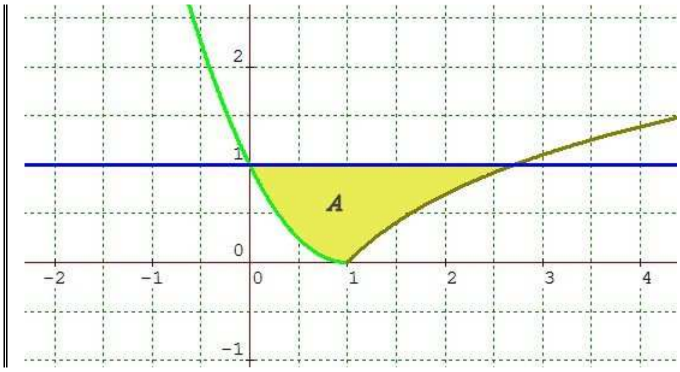
$$y' = 2\left(x-1\right) \Rightarrow y' = 0\;;\quad 2\left(x-1\right) = 0 \Rightarrow x = 1$$

** en el intervalo* $(1,+\infty)$ *tenemos la función logarítmica* $y=\ln x$, *que tiene asíntota vertical* $x=0$, *y pasa por los puntos* $(1,0)$ *y* $(e,1)$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)^2=0=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(\ln x)$$

La recta $y=1$ *que limita la región es una paralela al eje OX que pasa por* $(0,1)$





El área A, de la región pedida será:

$$A=\int_0^e 1dx-\int_0^1(x-1)^2dx-\int_1^e \ln x\,dx=[x]_0^e-\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1-[x\ln x-x]_1^e=$$

$$=[e-0]-\left[0-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]-[(e-e)-(0-1)]=e-\frac{4}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Determina el valor de a, $(a>0)$ para que el área del recinto limitado por la curva $y=x^3-ax$ y el eje OX sea 8 unidades cuadradas.

La curva $y=x^3-ax$ *tiene dominio* $\mathbb{R}$; *corta a los ejes en los puntos* $(0,0)$; $\left(-\sqrt{a},0\right)$; $\left(\sqrt{a},0\right)$.

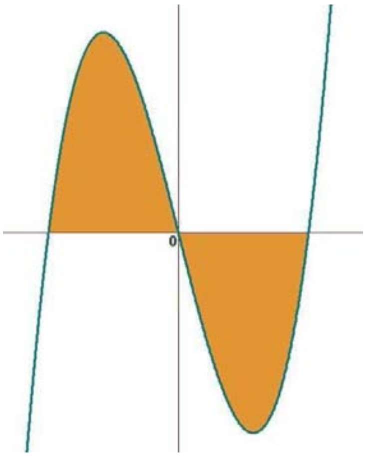
Es simétrica con respecto del origen de coordenadas: $f(-x)=(-x)^3-a(-x)=-x^3+ax=-f(x)$

$$y'=3x^2-a\ ;\ y'=0\ \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$y''=6x\ \Rightarrow$ *en* $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$ *hay un mínimo y en* $x=-\sqrt{\frac{a}{3}}$ *hay un máximo.*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-ax\right)=-\infty\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(x^3-ax\right)=+\infty$$

Con todo esto ya podemos esbozar la curva, y coloreamos el área que debe valer 8 *unidades.*



$$8=\int_{-\sqrt{a}}^{0}\left(x^3-ax\right)dx-\int_{0}^{\sqrt{a}}\left(x^3-ax\right)dx \;\Rightarrow\; también$$

$$\Rightarrow 4=\int_{-\sqrt{a}}^{0}\left(x^3-ax\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{ax^2}{2}\right]_{-\sqrt{a}}^{0} \;\Rightarrow\; 4=-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}$$

$$16=-a^2+2a^2 \;\Rightarrow\; a^2=16 \;\Rightarrow\; a=4$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$a)\ \int \frac{x^2-2x}{e^x}dx$ $\qquad b)\ \int \frac{4x^3+2x-1}{2x+1}dx$

$$\int \frac{x^2-2x}{e^x}dx=\int\left(x^2-2x\right)e^{-x}dx=-\left(x^2-2x\right)e^{-x}+\int(2x-2)e^{-x}dx=-\left(x^2-2x\right)e^{-x}+\left[-(2x-2)e^{-x}+\int 2e^{-x}dx\right]=$$

$$Por\ \ partes\quad\uparrow\begin{cases}u=x^2-2x \Rightarrow du=(2x-2)dx\\ dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}\end{cases}\qquad \uparrow otra\ vez\ por\ partes\begin{cases}u=2x-2 \Rightarrow du=2dx\\ dv=e^{-x}dx \Rightarrow v=-e^{-x}\end{cases}$$

$$=-\left(x^2-2x\right)e^{-x}-(2x-2)e^{-x}-2e^{-x}=e^{-x}\left(-x^2+2x-2x+2-2\right)=-x^2e^{-x}+C$$

$$\int\frac{4x^3+2x-1}{2x+1}dx=\int\left(2x^2-x+\frac{3}{2}+\frac{-5/2}{2x+1}\right)dx=2\int x^2dx-\int x\,dx+\frac{3}{2}\int dx-\frac{5}{4}\int\frac{2}{2x+1}dx=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{5}{4}\ln|2x+1|+C$$

$$\uparrow Dividimos\ y\ obtenemos:\ D=4x^3+2x-1;\ d=2x+1;\ c=2x^2-x+\frac{3}{2};\ r=-\frac{5}{2}.$$

$$\frac{D}{d}=c+\frac{r}{d}$$