Opción A

(Álgebra lineal. 3ª ev.)

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discutir el sistema $\begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 2 - m \\ (m+2)x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$, y resolverlo en los casos de compatibilidad.

Solución:

Como es un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas comenzamos analizando el rango de la matriz ampliada.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 2-m \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}_{F_3=F_3-F_1} = \begin{vmatrix} 2 & -m & 1 & 2-m \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m+2 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(2-m)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m+2 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{C_1=C_1-C_3} =$$

$$= (m-2)\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ m-1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (m-2)(m-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = -(m-2)^2(m-1)$$

El determinante se anula para $m=1$ *y* $m=2 \Rightarrow$ *si* $m \neq 1$ *y* $m \neq 2$, $Rang(\bar{A}) = 4 > Rang(A) \Rightarrow$ *sistema incompatible*

Para $m=1$, $Rang(\bar{A}) < 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 ; \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow Rang(A) = 3 = Rang(\bar{A}) = n^o \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible determinado}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 1 \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 0 \quad ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1$$

Para $m=2$, *es un sistema homogéneo* $\Rightarrow$ *siempre compatible*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 ; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 ; \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow Rang(A) = 2 = Rang(\bar{A}) \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado}$$

$$\begin{cases} 2x - 2y = -z \\ x + 2y = -z \end{cases} \Rightarrow 3x = -2z \Rightarrow x = -\frac{2}{3}z \quad ; \quad y = -\frac{1}{6}z \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}\lambda \\ y = -\frac{1}{6}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Comprueba que la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ cumple que $A^3=-A-I$.

Si A es cualquier matriz con n filas y n columnas tal que $A^3=-A-I$ y se sabe que $\det(A)=m$, calcula el valor de $\det(A+I)$ en función de m.

Solución:

$$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \quad ; \quad A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

$$-A-I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow A^3=-A-I$$

$$A\in M_{n\times n} \;\; ; \;\; \det(A)=m \;\; ; \;\; A^3=-A-I \;\Rightarrow A+I=-A^3 \; ; \; |A+I|=|-A^3|=|-A|\cdot|A|\cdot|A|=(-1)^n\cdot|A|^3=(-1)^n\cdot m^3$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Estudia el rango de la matriz A según los valores de los parámetros a y b.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & 1\\ 1 & ab & 1\\ 1 & b & a\end{pmatrix}$$

Solución:

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & 1\\ 1 & ab & 1\\ 1 & b & a\end{vmatrix}_{\text{también}\downarrow}=b\cdot\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=b\left(a^3-3a+2\right)=b(a-1)^2(a+2)\; ; \; |A|=0 \;\Rightarrow\; b(a-1)^2(a+2)=0 \Rightarrow \{b=0\,,\, a=1\,,\, a=-2\}$$

$$b\cdot\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2-F_1\\ F_3=F_3-F_1}}=b\cdot\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1-a & a-1 & 0\\ 1-a & 0 & a-1\end{vmatrix}_{C_1=C_1+C_2+C_3}=b\cdot\begin{vmatrix}a+2 & 1 & 1\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{vmatrix}=b(a-1)^2(a+2)$$

$$Si\;\; b\neq 0\,,\; a\neq 1 \;\; y \;\; a\neq -2 \;\Rightarrow\; Rang(A)=3$$

$$Si\;\; a=1\,,\; A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & b & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang(A)=1 \;\; (puesto\; que\; A\; tiene\; tres\;\; filas\; iguales)$$

$$Si\;\; a=-2\,,\; A=\begin{pmatrix}-2 & b & 1\\ 1 & -2b & 1\\ 1 & b & -2\end{pmatrix}\,,\; el\;\, menor\; \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang(A)=2$$

$$Si\;\; b=0\,,\; (a\neq 1),\; A=\begin{pmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & a\end{pmatrix}\,,\; el\;\, menor\; \begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0 \;\Rightarrow\; Rang(A)=2$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ k & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ k & 2\end{pmatrix}$ se pide:

a. Razona para qué valores de k la matriz $B^t\cdot A^t$ tiene inversa y obtenla en función de k.

b. Resuelve la ecuación $(AB)^t\cdot X=I$, para $k=0$, siendo I la matriz identidad.

Solución:

apartado a)

$$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}0 & -1 & k\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & k\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2k & k\\ 3 & k+2\end{pmatrix}$$

$(B^t\cdot A^t)$ *tiene inversa* $\Leftrightarrow |B^t\cdot A^t|\neq 0$; $|B^t\cdot A^t|=\begin{vmatrix}-1+2k & k\\ 3 & k+2\end{vmatrix}=(-1+2k)(k+2)-3k=2k^2-2$; $|B^t\cdot A^t|=0\Rightarrow 2k^2-2=0\Rightarrow k=\pm 1$

entonces $(B^t\cdot A^t)$ *tiene inversa cuando* $k\neq 1$ *y* $k\neq -1$.

Calculemos ahora $(B^t\cdot A^t)^{-1}$; *llamamos* $M=\begin{pmatrix}-1+2k & k\\ 3 & k+2\end{pmatrix}$, *y sabemos que* $|M|=2k^2-2$

$$\begin{matrix}M_{11}=k+2 & M_{21}=-k\\ M_{12}=-3 & M_{22}=-1+2k\end{matrix}\quad\Rightarrow\quad M^{-1}=(B^t\cdot A^t)^{-1}=\frac{1}{2k^2-2}\begin{pmatrix}k+2 & -k\\ -3 & -1+2k\end{pmatrix}$$

apartado b)

Hay que resolver la ecuación $(A\cdot B)^t\cdot X=I\ \Rightarrow\ X=\left[(A\cdot B)^t\right]^{-1}\cdot I\ \Rightarrow\ X=\left[(A\cdot B)^t\right]^{-1}$ $(para\ k=0)$

si no nos hemos dado cuenta, calculamos $(A\cdot B)^t$; $A\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ k & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ k & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2k & 3\\ k & k+2\end{pmatrix}\Rightarrow (A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}-1+2k & k\\ 3 & k+2\end{pmatrix}$

y observamos que $(A\cdot B)^t=(B^t\cdot A^t)$ *igualdad que es cierta siempre que existan los productos, entonces*

$$X=\left[(A\cdot B)^t\right]^{-1}=(B^t\cdot A^t)^{-1}\ (para\ k=0)\Rightarrow X=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix};\quad X=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

también se puede calcular $(A\cdot B)^t$ $(para\ k=0)$ *y encontrar "de nuevo" su inversa.*

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discute y resuelve el sistema según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x-2y+4z=0 \\ x-(\lambda+1)y+z=0 \\ -x+\lambda y-z=0 \end{cases}$$

Solución:

El sistema es homogéneo con lo que sabemos que será compatible para todo valor de λ.

$$A=\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & -(\lambda+1) & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \end{pmatrix} \;,\; |A|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 1 & -(\lambda+1) & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \end{vmatrix}_{F_2=F_2+F_3} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-1+4) = -(\lambda+3)$$

$$|A|=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

si $\lambda\neq-3$, $Rang(A)=Rang(\bar{A})=3 \Rightarrow$ *sistema compatible determinado* $\Rightarrow$ *solución* $\{x=0\,,\; y=0\,,\; z=0\}$

si $\lambda=-3$, $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=10 \Rightarrow Rang(A)=Rang(\bar{A})=2 \Rightarrow$ *sistema compatible indeterminado*

$$\begin{cases} 4x-2y=-4z \\ x+2y=-z \end{cases} \;,\; 1^a+2^a \Rightarrow 5x=-5z \Rightarrow x=-z \;\;;\;\; y=0 \;\Rightarrow\; \textit{solución}: \begin{cases} x=-\mu \\ y=0 \\ z=\mu \end{cases}$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Resuelve la ecuación matricial $B\cdot(2A+I)=A\cdot X\cdot A+B$, siendo

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Tenemos la ecuación $B\cdot(2A+I)=A\cdot X\cdot A+B \Rightarrow 2B\cdot A+B=A\cdot X\cdot A+B \Rightarrow 2B\cdot A=A\cdot X\cdot A \Rightarrow A^{-1}\cdot(2B\cdot A)\cdot A^{-1}=X$

entonces $X=A^{-1}\cdot(2B)$

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\; |A|=1$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2 \quad A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2 \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=5 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=7 \quad \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-4 \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=-5$$

$$X=A^{-1}\cdot(2B)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 \\ -6 & -18 & 12 \\ 4 & 14 & -10 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Resuelve la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & x & 5 & -1 \\ 4 & x^2 & 13 & 1 \\ 8 & x^3 & 35 & -1 \end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2+F_1 \\ F_3=F_3-F_1 \\ F_4=F_4+F_1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & x+1 & 7 & 0 \\ 3 & x^2-1 & 11 & 0 \\ 9 & x^3+1 & 37 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & x+1 & 7 \\ 3 & (x+1)(x-1) & 11 \\ 9 & (x+1)(x^2-x+1) & 37 \end{vmatrix} = -3(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & x-1 & 11 \\ 3 & x^2-x+1 & 37 \end{vmatrix}_{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-3F_1}} = -3(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & x-2 & 4 \\ 0 & x^2-x-2 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= -3(x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 4 \\ x^2-x-2 & 16 \end{vmatrix} = -12(x+1)\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ x^2-x-2 & 4 \end{vmatrix} = -12(x+1)\left(4x-8-x^2+x+2\right) = -12(x+1)\left(-x^2+5x-6\right) = 12(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$12(x+1)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow \{x=-1 \ , \ x=2 \ , \ x=3\}$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Discutir y resolver, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+(m-2)z=1 \\ mx+3y+mz=2 \end{cases}$$

Solución:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-2 \\ m & 3 & m \end{pmatrix} \ , \ \textit{buscamos posibles menores de orden 2 distintos de cero;}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow 3-m=0 \Rightarrow m=3 \ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ m & m \end{vmatrix} \Rightarrow 3m-m^2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=3 \end{cases} \ ; \quad \begin{vmatrix} 1 & m-2 \\ 3 & m \end{vmatrix} \Rightarrow 6-2m=0 \Rightarrow m=3$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-2 & 1 \\ m & 3 & m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\left(\overline{A}\right)=2$$

$$si \ m \neq 3 \ , \ Rang(A)=Rang\left(\overline{A}\right)=2 \Rightarrow \textit{sistema compatible indeterminado}$$

$$si \ m=3 \ , \ Rang(A)=1 \neq Rang\left(\overline{A}\right)=2 \Rightarrow \textit{sistema incompatible}$$

resolvemos para $m \neq 3$

$$\begin{cases} x+y=1-(m-2)z \\ mx+3y=2-mz \end{cases} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1-(m-2)z & 1 \\ 2-mz & 3 \end{vmatrix}}{3-m}=\dfrac{1+(6-2m)z}{3-m} \\ \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1-(m-2)z \\ m & 2-mz \end{vmatrix}}{3-m}=\dfrac{(2-m)+\left(m^2-3m\right)z}{3-m} \end{array} \right. \Rightarrow \ Solución: \begin{cases} x=\dfrac{1+(6-2m)\lambda}{3-m} \\ y=\dfrac{(2-m)+\left(m^2-3m\right)\lambda}{3-m} \\ z=\lambda \end{cases}$$

1ª evaluación

Ejercicio 1.

Se considera la función $f(x)=\dfrac{|x|}{1+x^2}$.

a. Estudia la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

b. Encuentra los máximos y mínimos de $f(x)$.

c. Calcula la recta tangente a $f(x)$ en el punto $x=2$.

Solución:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{1+x^2} & si\ \ x<0\\[2mm] \dfrac{x}{1+x^2} & si\ \ x\geq 0\end{cases}\quad ;$$

$f(x)$ *está definida por dos ramas que son siempre continuas y derivables, puesto que son cociente de polinomios y* $1+x^2\neq 0$. *Hay que analizar la continuidad y derivabilidad en* $x=0$

$$f(0)=0\ ,\quad \lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{1+x^2}=0\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{1+x^2}=0\end{cases}\ \Rightarrow\ f(x)\ \text{es continua en } x=0$$

$$\begin{cases} f'_-(0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{\dfrac{-h}{1+h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{-1}{1+h^2}=-1\\[4mm] f'_+(0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{\dfrac{h}{1+h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{1+h^2}=1\end{cases}\ \Rightarrow\ f(x)\ \text{no es derivable en } x=0$$

$f(x)\geq 0$, *y* $f(x)=0$ *en el punto* $x=0 \Rightarrow$ *por tanto en* $(0,0)$ $f(x)$ *tiene un mínimo , que no aparecerá al derivar ya que en* $x=0$ *la función no es derivable.*

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2} & si\ x<0\\[2mm] \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & si\ x>0\end{cases}\ \Rightarrow\ f'(x)=0\quad \begin{cases}x^2-1=0\ \Rightarrow\ x=-1 & (es\ para\ valores\ x<0)\\ 1-x^2=0\ \Rightarrow\ x=1 & (es\ para\ valores\ x>0)\end{cases}$$

$$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3} & si\ x<0\\[2mm] \dfrac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3} & si\ x>0\end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases}f''(-1)<0\ \Rightarrow\ \text{en el punto } \left(-1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)\ \text{hay un máximo}\\[2mm] f''(1)<0\ \Rightarrow\ \text{en el punto } \left(1\ ,\ \dfrac{1}{2}\right)\ \text{hay un máximo}\end{cases}$$

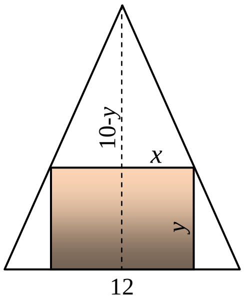
Para calcular la recta tangente necesitamos el punto de tangencia $(x_0\,,y_0)=\left(2\ ,\ \dfrac{2}{5}\right)$ *y la pendiente* $m=f'(2)=-\dfrac{3}{25}$

$$r_{tg}\equiv y-\frac{2}{5}=-\frac{3}{25}(x-2)\ \Rightarrow\ r_{tg}\equiv y=\frac{-3x+16}{25}$$

Ejercicio 2.

En un triángulo isósceles de base 12 cm (correspondiente al lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados está sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales del triángulo. Calcula las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Solución:



$$\text{Área del rectángulo} = 2xy$$

$$\text{tenemos la relación de semejanza} \quad \frac{10-y}{x} = \frac{10}{6} \Rightarrow 60-6y = 10x \Rightarrow y = \frac{60-10x}{6}$$

$$\text{la función a maximizar es} \quad A(x) = 2x\frac{60-10x}{6} \Rightarrow A(x) = \frac{60x-10x^2}{3}$$

$$A'(x) = \frac{60-20x}{3} \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow 60-20x = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$A''(x) = -\frac{20}{3} \quad , \quad A''(3) = -\frac{20}{3} < 0 \Rightarrow \text{para } x = 3,\ A(x) \text{ es máxima.}$$

$$\text{Dimensiones del rectángulo}: \ \text{base} = 6 \text{ cm} \ ; \ \text{altura} = 5 \text{ cm}$$

Ejercicio 3.

a. Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x}$

b. Dada la función $f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, demuestra que existe $\alpha \in (1, 2)$ tal que $f'(\alpha) = -2$.

Solución:

a)

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} = A \quad \left(\text{indeterminación } 1^{\infty} \right)$$

$$\ln A = \ln\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)}{\cos x} = (L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\frac{2}{\pi} - sen\, x}{\frac{2x}{\pi} + \cos x}}{-sen x} = \frac{\frac{2}{\pi} - 1}{\frac{1+0}{-1}} = \frac{\pi - 2}{\pi} \Rightarrow A = e^{\frac{\pi-2}{\pi}} \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x}{\pi} + \cos x \right)^{1/\cos x} = e^{\frac{\pi-2}{\pi}}$$

b)

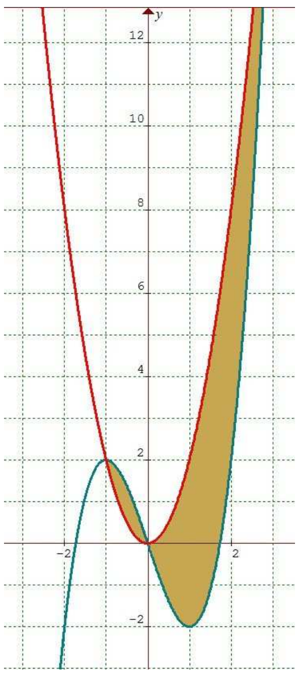
$f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ *es continua en* $[1, 2]$ *y derivable en* $(1, 2)$ *por ser producto de funciones continuas y derivables* $\Rightarrow$ *cumple las hipótesis del teorema del valor medio* $\Rightarrow \exists\ \alpha \in (1, 2)$ *tal que* $f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{2\cos\pi - \cos\frac{\pi}{2}}{1} = -2$

2ª evaluación

Ejercicio 1.

Esboza las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x$ y $g(x) = 2x^2$, y calcula el área del recinto limitado por ambas curvas.

Solución:



$f(x) = x^3 - 3x$

Dom $f = \mathbb{R}$; *corta al eje OX en los puntos* $\left(-\sqrt{3},0\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3},0\right)$; *al ser polinómica no tiene asíntotas.*

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x) \Rightarrow$ *es simétrica respecto del origen de coordenadas.*

$f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$f''(x) = 6x$, $\begin{cases} f''(1) > 0 \Rightarrow \text{en el punto } (1,-2) \text{ hay un mínimo} \\ f''(-1) < 0 \Rightarrow \text{en el punto } (-1,2) \text{ hay un máximo} \end{cases}$; *en* $(0,0)$ *hay punto de inflexión.*

$g(x) = 2x^2$ *es una parábola que tiene su vértice en* $(0,0)$

Cortes entre ambas curvas $f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x = 2x^2 \Rightarrow x\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \Rightarrow \{x = 0 , x = -1 , x = 3\}$

se cortan en los puntos $(-1,2)$, $(0,0)$ *y* $(3,18)$

El área pedida será $A = \int_{-1}^{0}\left(f(x) - g(x)\right)dx + \int_{0}^{3}\left(g(x) - f(x)\right)dx$

$$A = \int_{-1}^{0}\left(x^3 - 2x^2 - 3x\right)dx + \int_{0}^{3}\left(-x^3 + 2x^2 + 3x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{3} =$$

$$= \left[0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)\right] + \left[\left(-\frac{81}{4} + \frac{54}{3} + \frac{27}{2}\right) - 0\right] = \frac{71}{6}$$

Ejercicio 2.

- Calcula el valor de $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \cdot sen\left(x^2\right)dx$.
- Calcula la primitiva de la función $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$ cuya gráfica pasa por el punto $(0 , 1)$.

Solución:

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x \cdot sen\left(x^2\right)dx = -\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} 2x \cdot \left(-sen\left(x^2\right)\right)dx = -\frac{1}{2}\left[\cos\left(x^2\right)\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2}\left[\cos(2\pi) - \cos(\pi)\right] = -\frac{1}{2}\left[1 - (-1)\right] = -1$$

$$F(x)=\int \ln(1-x^2)\,dx = x\cdot\ln(1-x^2)-\int x\cdot\frac{-2x}{1-x^2}\,dx = x\cdot\ln(1-x^2)+2\int\frac{x^2}{1-x^2}\,dx = x\cdot\ln(1-x^2)+2\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx =$$

$$\uparrow\left\{\begin{array}{l} u=\ln(1-x^2)\ \Rightarrow du=\dfrac{-2x}{1-x^2}\,dx \\ dv=dx\ \Rightarrow\ v=x \end{array}\right\}$$

$$= x\cdot\ln(1-x^2)-2\int dx+2\int\frac{1}{1-x^2}\,dx = x\cdot\ln(1-x^2)-2\int dx+\int\frac{1}{1+x}\,dx-\int\frac{-1}{1-x}\,dx = x\cdot\ln(1-x^2)-2x+\ln|1+x|-\ln|1-x|+C$$

$$\uparrow\left\{\frac{1}{1-x^2}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}=\frac{(B-A)x+A+B}{1-x^2}\quad\Rightarrow\ \frac{1}{1-x^2}=\frac{1/2}{1+x}+\frac{1/2}{1-x}\right\}$$

$F(x)=x\cdot\ln(1-x^2)-2x+\ln|1+x|-\ln|1-x|+C$; *como sabemos que* $F(0)=1\ \Rightarrow\ C=1$

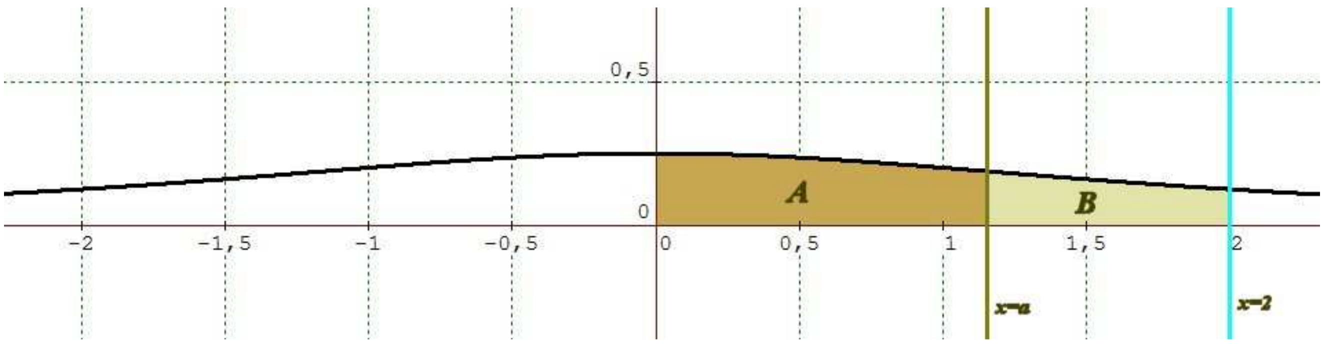
para que exista $\ln(1-x^2)\ \Rightarrow\ -1<x<1$, *entonces podemos quitar los valores absolutos y nos queda*:

$$F(x)=x\cdot\ln(1-x^2)-2x+\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+1$$

Ejercicio 3.

Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por el eje OX, el eje OY, la recta $x=2$ y la curva $y=\dfrac{1}{4+x^2}$. Encontrar el valor de α para que la recta $x=\alpha$ divida la región R en dos partes $A\ (izquierda)$ y $B\ (derecha)$, tales que el área de A sea el doble que la de B.

Solución:



$$A=2B\ \Rightarrow\ \int_0^{\alpha}\frac{1}{4+x^2}\,dx=2\int_{\alpha}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,dx$$

$$\int\frac{1}{4+x^2}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=\frac{2}{4}\int\frac{1/2}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)+C$$

$$\int_0^{\alpha}\frac{1}{4+x^2}\,dx=2\int_{\alpha}^{2}\frac{1}{4+x^2}\,dx\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\left[arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]_0^{\alpha}=2\cdot\frac{1}{2}\left[arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]_{\alpha}^{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=arctg(1)-arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)+arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \frac{3}{2}arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ \alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$