Autoevaluación

Página 200

1 **Determina todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\vec{u}(1, -1, -1)$ y $\vec{v}(-1, 2, 1)$.**

Los vectores perpendiculares a los dos vectores a la vez son proporcionales al producto vectorial de ambos.

$\vec{w} = (1, -1, -1) \times (-1, 2, 1) = (1, 0, 1)$

$|\vec{w}| = 2$

Los vectores que buscamos son:

$$\vec{w}_1 = 2\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) \text{ y } \vec{w}_2 = -2\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

2 **Dados los vectores $\vec{u}(2, 0, 0)$, $\vec{v}(1, 0, -1)$ y $\vec{w}(-2, 3, 2)$, calcula:**

a) El área del paralelogramo determinado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

b) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) Área $= |\vec{v} \times \vec{w}|$

$\vec{v} \times \vec{w} = (1, 0, -1) \times (-2, 3, 2) = (3, 0, 3) \to$ Área $= \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ u^2

b) $$cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{(2, 0, 0) \cdot (1, 0, -1)}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\,cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

c) $$V = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \text{ u}^3$$

3 **Dados los puntos $P(3, 2, 0)$, $Q(5, 1, 1)$ y $R(2, 0, -1)$:**

a) Halla la recta que pasa por P y Q.

b) Halla el plano que contiene a P, Q y R.

c) Halla la distancia entre P y Q.

a) $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1)$

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{PR} = (-1, -2, -1)$

$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (2, -1, 1) \times (-1, -2, -1) = (3, 1, -5) \perp \pi$

π: $3(x-3) + 1(y-2) - 5(z-0) = 0 \to 3x + y - 5z - 11 = 0$

c) $dist\,(P, Q) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ u

4 **Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento de extremos $A(0, -1, 3)$ y $B(2, -1, 1)$ y que pasa por el punto medio de dicho segmento.**

Punto medio: $M = \left(\frac{0+2}{2}, \frac{-1-1}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = (1, -1, 2)$

Vector normal al plano: $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 1) - (0, -1, 3) = (2, 0, -2)$

La ecuación del plano buscado es: $(x-1) - 2(z-2) = 0 \;\to\; \pi\text{: } 2x - 2z + 2 = 0$

5 **Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $2x + y + 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.**

Puntos de corte:

$P = \pi \cap OX = (1, 0, 0)$

$Q = \pi \cap OY = (0, 2, 0)$

$R = \pi \cap OZ = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{PQ} = (0, 2, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 2, 0)$

$\overrightarrow{PR} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$

$\textit{Área triángulo} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|(-1, 2, 0) \times (-1, 0, 1)\right| = \frac{1}{2}\left|(2, 1, 2)\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9} = \frac{3}{2}\ \text{u}^2$

6 **Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente al eje Z y pasa por el punto $P(1, 2, 3)$.**

El vector director de r, el del eje Z y el que une P con un punto del eje Z deben ser coplanarios.

$Q(0, 0, 1) \qquad P(1, 2, 3)$

$$\vec{v}_z = (0, 0, 1) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\to\; 2a - b = 0$$

Además, $\vec{v}_z \cdot \vec{d}_r = 0 \;\to\; (0, 0, 1)(a, b, c) = 0 \;\to\; c = 0$

El vector director de r es de la forma $(1, 2, 0)$.

Por tanto, $(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 0)$

7 **Considera las rectas siguientes:**

$$r\text{: } \begin{cases} 2x - y = 0 \\ ax - z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\text{: } \begin{cases} x + by = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

a) Determina los valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que r y s sean paralelas.

b) ¿Existen valores de $a \neq 0$ y $b \neq 0$ para que las rectas sean coincidentes?

$$r\text{: } \begin{cases} \vec{d}_r = (2, -1, 0) \times (a, 0, 1) = (1, 2, a) \\ P_r = (0, 0, 0) \end{cases} \qquad s\text{: } \begin{cases} \vec{d}_s = (1, b, 0) \times (0, 1, 1) = (b, -1, 1) \\ P_s = (3, 0, 3) \end{cases}$$

a) $\vec{d}_r = k\vec{d}_s \;\to\; \frac{1}{b} = \frac{2}{-1} = \frac{a}{1} \;\to\; \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$

b) $\overrightarrow{P_rP_s} = (3, 0, 3)$

Para que sean coincidentes, necesitamos $\overrightarrow{P_rP_s} = k\vec{d}_s \;\to\; \frac{3}{b} = \frac{0}{-1} \neq \frac{3}{1}$

Las coordenadas no son proporcionales para ningún valor de b, luego no existen valores de $a \neq 0$ y de $b \neq 0$ para los cuales las rectas son coincidentes.

8 **Sean las rectas** $r: x = y = z$ **y** $s: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 3z = 1 \end{cases}$.

a) Comprueba que r **y** s **se cruzan.**

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r **y** s.

$r: \begin{cases} \vec{d_r} = (1, 1, 1) \\ P_r = (0, 0, 0) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} \vec{d_s} = (1, -1, 0) \times (1, 0, -3) = (3, 3, 1) \\ P_s = (1, 0, 0) \end{cases}$

a) $\overrightarrow{P_r P_s} = (1, 0, 0)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) Vector perpendicular común: $\vec{w} = (1, 1, 1) \times (3, 3, 1) = (-2, 2, 0)$

π: plano que contiene a r y a la dirección $\vec{w}$:

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; -2x - 2y + 4z = 0$$

π': plano que contiene a s y a la dirección $\vec{w}$:

$$\pi': \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 3 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; -2x - 2y + 12z + 2 = 0$$

La recta pedida, t, es:

$$t: \begin{cases} -2x - 2y + 4z = 0 \\ -2x - 2y + 12z + 2 = 0 \end{cases}$$

9 **Considera las rectas** $r: \begin{cases} 2x - 4z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ **y** $s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{a} = \dfrac{2z-1}{4}$.

a) Estudia su posición relativa según los valores de a.

b) Calcula el ángulo que forman en el caso $a = 2$.

$r: \begin{cases} \vec{d_r} = (2, 0, -4) \times (1, 1, 1) = (4, -6, 2) \\ P_r = (1, 0, 0) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} \vec{d_s} = (2, a, 2) \\ P_s = \left(0, -2, \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

a) $ran \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix} = 2$

Las rectas se cruzan o se cortan para cualquier valor de a, pero nunca serán paralelas.

$\overrightarrow{P_r P_s} = \left(-1, -2, \dfrac{1}{2}\right)$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ -1 & -2 & 1/2 \end{vmatrix} = 4a + 26 = 0 \;\rightarrow\; a = -\frac{13}{2}$$

- Si $a \neq -\dfrac{13}{2} \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3 \;\rightarrow\;$ Las rectas se cruzan.
- Si $a = -\dfrac{13}{2} \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2 \;\rightarrow\;$ Las rectas se cortan.

b) $cos\,(\widehat{\vec{r}, \vec{s}}) = |\,cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = \left| \dfrac{\vec{d_r} \cdot \vec{d_s}}{|\vec{d_r}|\,|\vec{d_s}|} \right| = \dfrac{(4, -6, 2) \cdot (2, 2, 2)}{2\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{3}} = 0 \;\rightarrow\; (\widehat{\vec{r}, \vec{s}}) = \dfrac{\pi}{2}$ rad

Las rectas son perpendiculares.

10 **a) Halla las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por $A(0, 2, -4)$ y es paralela a r:**
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases}.$$

b) Calcula la distancia del punto $P(1, 1, 0)$ a r.

a) Calculamos el vector director de r, $\vec{d}_r$.

$\vec{d}_r = (5, -3, 2) \times (1, 3, -2) = (0, 12, 18)$

Como son paralelas, $\vec{d}_s \,//\, \vec{d}_r \;\to\; \vec{d}_s = (0, 2, 3)$

Entonces, $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}$

b) $r: \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \;\to\; x = -\dfrac{1}{2},\; y = \dfrac{2}{3}\lambda - \dfrac{7}{6},\; z = \lambda$

$$dist\,(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \times \vec{d}_r|}{|\vec{d}_r|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{d}_r = \left(0, \dfrac{2}{3}, 1\right) = \dfrac{1}{3}(0, 2, 3);\quad P_r = \left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{7}{6}, 0\right) \\ \overrightarrow{PP_r} = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{6}, 0\right) \\ \overrightarrow{PP_r} \times \vec{d}_r = \left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{13}{6}, 0\right) \times (0, 2, 3) = \left(-\dfrac{13}{2}, \dfrac{9}{2}, -2\right) \end{array}\right\} \to dist\,(P, r) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{143}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{22}}{2}\ \text{u}$$

11 **Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 0, -1)$, es paralelo a la recta $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y es perpendicular al plano α: $2x - y + z + 1 = 0$.**

$(1, -2, 0) \times (0, 0, 1) = (-2, -1, 0) \,//\, (2, 1, 0) = \vec{d}_r$

Sea π el plano buscado y $\vec{n}$ su vector normal. Entonces:

$\pi \,//\, r \;\Rightarrow\; \vec{d}_r \perp \vec{n}$

$\pi \perp \sigma \;\Rightarrow\; \vec{n} \perp (2, -1, 1)$

Por tanto, $\vec{n} = (2, 1, 0) \times (2, -1, 1) = (1, -2, -4)$

Ecuación de π: $1(x - 1) - 2(y - 0) - 4(z + 1) = 0 \;\to\; x - 2y - 4z - 5 = 0$

12 **Considera el plano π: $x + y - z = 0$ y el punto $P(1, 1, -1)$. Obtén:**

a) El punto Q del plano π tal que la recta s determinada por P y Q sea perpendicular al plano π.

b) Los puntos R de la recta s tales que la distancia de R a π sea el doble que la distancia de P a π.

a) s: recta perpendicular a π que pasa por P.

$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$