Autoevaluación

Página 117

1 Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema e interprétalo geométricamente:

$$\begin{cases} x-3y-z=-1 \\ x+5y+3z=3 \\ x+y+z=1 \\ 3x+7y+5z=5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-1 \\ x+5y+3z=3 \\ x+y+z=1 \\ 3x+7y+5z=5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \\ (4.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a)-(1.^a) \\ (3.^a)-(1.^a) \\ (4.^a)-3\cdot(1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a):2 \\ (3.^a)+(2.^a) \\ (4.^a)-(2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2y+z=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=1-2y \\ x=1-y-z=y \\ y=\lambda \end{array}$$

Soluciones: $x=\lambda,\ y=\lambda,\ z=1-2\lambda$. Son cuatro planos con una recta en común.

2 Un transportista tiene tres camiones P, Q y R en los que caben un cierto número de contenedores de tres tipos A, B y C. En el camión P caben 5 contenedores del tipo A, 3 del tipo B y 4 del C. En el camión Q, caben 2 contenedores del tipo A, 5 del B y 5 del C. Y en el camión R, caben 4 del A, 3 del B y 6 del C. Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los hacen totalmente llenos?

Llamamos:

x = viajes del camión P

y = viajes del camión Q

z = viajes del camión R

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & Q & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 44 \\ 58 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+2y+4z=45 \\ 3x+5y+3z=44 \\ 4x+5y+6z=58 \end{array}\right\} \to x=5,\ y=4,\ z=3$$

El camión P tiene que dar 5 viajes.

El camión Q tiene que dar 4 viajes.

El camión R, tiene que dar 3 viajes.

3 **a) Discute, en función de a, el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} x + ay + \ \ z = a + 2 \\ x + \ \ y + az = -2(a+1) \\ ax + \ \ y + \ \ z = a \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

a) $\left.\begin{array}{l} x + ay + \ \ z = a + 2 \\ x + \ \ y + az = -2(a+1) \\ ax + \ \ y + \ \ z = a \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right)$, donde A es la matriz de las tres primeras columnas.

$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

- Si $a = 1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- Si $a = -2$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entonces $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$: $ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

b) Para $a = -1$, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$ y sabemos que $|A| = 4$, donde A es la matriz de las tres primeras columnas.

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$

4 Demuestra que no hay valores de m para los que este sistema no tenga solución. Resuélvelo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}}_{A}$$

$|A| = 4 - m = 0 \;\rightarrow\; m = 4$

- Si $m = 4$:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$ La 4.ª columna se obtiene sumando la 2.ª y la 3.ª.

  Luego, $ran(A) = ran(A')$. El sistema es *compatible*. (En este caso sería *compatible indeterminado*, pues:

  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 2$).

  Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

  $$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 - z \\ x + 3y = 5 - 2z \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 2 \\ 5 - 2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 1 & 5 - 2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

  Soluciones: $x = -1 + \lambda, \; y = 2 - \lambda, \; z = \lambda$

- Si $m \neq 4 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos en este caso:

  $$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{4 - m}{4 - m} = 1\,; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{0}{4 - m} = 0\,;$$

  $$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{8 - 2m}{4 - m} = \frac{2(4 - m)}{4 - m} = 2$$

  Solución: $x = 1, \; y = 0, \; z = 2$

  Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

5 El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

La matriz ampliada es una matriz cuadrada de orden 4.

Su rango puede ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas* $\rightarrow$ El sistema será *compatible determinado*.
- Si $ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4 \;\rightarrow\;$ El sistema será *incompatible*.

6 Discute y resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Según el teorema de Rouché, el sistema tendrá solución si el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada son iguales.

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ a \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \right.\right)$$

Como la matriz ampliada es de orden 4, buscamos los valores que anulan su determinante.

$$|A'| \underset{\substack{(4.^a)}}{\overset{\substack{\text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a)-(1.^a)}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 2a - 2 + 3a - 2 - 4 \to a = 14$$

- Si $a = 14$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 1 \\ 14 \\ -2 \\ 2 \end{matrix} \right.\right) \to \text{Como } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 3 = n.^o \textit{ de incógnitas.}$$

El sistema es *compatible determinado*.

- Si $a \neq 14 \to ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$. El sistema es *incompatible*.
- Resolución si $a = 14$:

Tomamos las ecuaciones 2.ª, 3.ª y 4.ª:

$$\begin{cases} y + z = 14 \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

De la 1.ª y la 3.ª ecuación obtenemos $2y = 16 \to y = 8$

$z = 14 - 8 = 6$

En la 2.ª $x = -1 + 3z = -1 + 18 = 17$

Solución: $x = 17,\ y = 8,\ z = 6$

Otra forma de resolver el problema

Si resolvemos el sistema formado por las ecuaciones 1.ª, 3.ª y 4.ª, obtendríamos la solución $x = 17$, $y = 8$, $z = 6$.

Llevando estos valores a la 2.ª ecuación, $y + z = a \to 8 + 6 = a \to a = 14$. Este es el valor de a que hace el sistema compatible. Para cualquier otro valor de a, el sistema no tiene solución.

7 En un sistema homogéneo de tres ecuaciones y dos incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2.

Di, razonadamente, cuántas soluciones tendrá el sistema.

En un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada siempre coincide ya que al añadir una columna de ceros no cambia el rango.

Por tanto, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 2 = n.^o$ *de incógnitas.*

El sistema será *compatible determinado*. Solo tiene una solución que es la trivial: $x = 0$, $y = 0$.