12 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:**

$$\text{a) }\left\{\begin{array}{l} mx+y+z=4\\ x+y+z=m\\ x-y+mz=2\end{array}\right. \qquad \text{b) }\left\{\begin{array}{l} x+y+z=m-1\\ 2x+y+mz=m\\ x+my+z=1\end{array}\right. \qquad \text{c) }\left\{\begin{array}{l} x+2y+3z=0\\ x+my+z=0\\ 2x+3y+4z=2\end{array}\right.$$

$$\text{d) }\left\{\begin{array}{l} x+my+z=4\\ x+3y+z=5\\ mx+y+z=4\end{array}\right. \qquad \text{e) }\left\{\begin{array}{l} x+2z=3\\ 3x+y+z=-1\\ 2y-z=-2\\ x-y+mz=-5\end{array}\right. \qquad \text{f) }\left\{\begin{array}{l} -2x+y+z=1\\ x-2y+z=m\\ x+y-2z=0\\ x-y-z=m\end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} mx+y+z=4\\ x+y+z=m\\ x-y+mz=2\end{array}\right\} \quad A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}m&1&1\\1&1&1\\1&-1&m\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}4\\m\\2\end{matrix}\right)$$

$$|A|=m^2-1=0 \left\langle\begin{array}{l} m=1\\ m=-1\end{array}\right.$$

- Si $m=1$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&4\\1&1&1&1\\1&-1&1&2\end{array}\right)$$ Contradictorias → Sistema *incompatible.*

- Si $m=-1$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&4\\1&1&1&-1\\1&-1&-1&2\end{array}\right)$$ Contradictorias → Sistema *incompatible.*

- Si $m\neq 1$ y $m\neq -1$ → *ran* (A) = *ran* $(A')=3$ = *n.º de incógnitas.*

  El sistema es *compatible determinado.*

b) $$\left.\begin{array}{l} x+y+z=m-1\\ 2x+y+mz=m\\ x+my+z=1\end{array}\right\} \quad A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\2&1&m\\1&m&1\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}m-1\\m\\1\end{matrix}\right)$$

$$|A|=-m^2+3m-2=0 \rightarrow m=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2} \left\langle\begin{array}{l} m=1\\ m=2\end{array}\right.$$

- Si $m=1$, queda:

$$A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\2&1&1&1\\1&1&1&1\end{array}\right)$$ Contradictorias → Sistema *incompatible.*

- Si $m=2$, queda:

$$A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&1\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right).$$ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales.

  Como $\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ → *ran* (A') = *ran* $(A)=2<$ *n.º de incógnitas.*

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- Si $m\neq 1$ y $m\neq 2$ → *ran* (A) = *ran* $(A')=3$ = *n.º de incógnitas.*

  El sistema es *compatible determinado.*

c) $$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2 \end{array}\right.\right)$$

$|A| = -2m + 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$

- Si $m = 1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, entonces: $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

  El sistema es *incompatible*.

- Si $m \neq 1$, queda: $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

d) $$\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 4 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\rightarrow\; m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 3$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$ Contradictorias $\rightarrow$ Sistema *incompatible*.

- Si $m = 1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$$. La 1.ª y la 3.ª fila son iguales.

  Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $m \neq 3$ y $m \neq 1 \;\rightarrow\; ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

e) $$\left.\begin{array}{rrrl} x & & +\,2z & = 3 \\ 3x\,+ & y\,+ & z & = -1 \\ & 2y\,- & z & = -2 \\ x\,- & y\,+ & mz & = -5 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & m & -5 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & m-2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & m-7 & -18 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 9 & 18 \\ m-7 & -18 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ m-7 & -1 \end{vmatrix} = 18(-9 - m + 7) = 18(-m-2) = 0 \;\to\; m = -2$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \;\to\; ran\,(A) = 3$

- Si $m = -2 \;\to\; ran\,(A) = ran\,(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.
- Si $m \neq -2 \;\to\; ran\,(A') = 4 \neq ran\,(A) = 3$. El sistema es *incompatible*.

f) $$\left.\begin{array}{rrrl} -2x\,+ & y\,+ & z & = 1 \\ x\,- & 2y\,+ & z & = m \\ x\,+ & y\,- & 2z & = 0 \\ x\,- & y\,- & z & = m \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & m \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & m \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{A}$$

$|A'| = 3m + 3 = 0 \;\to\; m = -1$

Eliminando de A la 3.ª fila, $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

- Si $m = -1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

  Entonces: $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

- Si $m \neq -1$, queda:

  $3 = ran\,(A) < ran\,(A') = 4 \;\to\;$ El sistema es *incompatible*.

13 **Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sean compatibles e interpreta geométricamente las soluciones obtenidas:**

a) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ mx + y + (m-1)z = 2 \\ x + my + z = m \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$

a) La matriz asociada al sistema, permutando las dos primeras filas entre sí, es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right)$$

Usando el método de Gauss obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array}\right)$$

- Si $m \neq 10 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.
- Si $m = 10 \rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

  Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

  Soluciones: $x = \frac{1}{5}\lambda + 1,\ y = \frac{3}{5}\lambda - 1,\ z = \lambda$

Interpetación geométrica:

- Si $m \neq 10$, tenemos tres planos que se cortan dos a dos.
- Si $m = 10$, tenemos tres planos que se cortan en una recta.

b) $\left.\begin{array}{l} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos usando la regla de Cramer:

  $$x = \frac{-a + a^2 + 1}{a - 1},\quad y = \frac{1}{a+1},\quad z = \frac{2}{a^2 - 1}$$

- Si $a = -1$:

  $$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A') = 3$$

  Luego, $ran(A) \neq ran(A') \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 1$:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna y la 2.ª fila:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \rightarrow ran(A') = 3$$

  Luego, $ran(A) \neq ran(A')$ → El sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica:

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = -1$, el primer y el tercer plano son paralelos.
- Si $a = 1$, el primer y el segundo plano son paralelos.

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = m - 1$$

- Si $m \neq 1 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$ → El sistema es *compatible determinado.*

  Lo resolvemos usando la regla de Cramer y obtenemos: $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$.

- Si $m = 1$:

  $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A') = 2$$

  Luego, $ran(A) = ran(A') = 2$ → El sistema es *compatible indeterminado*.

  Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos y al segundo miembro como parámetro.

  Soluciones: $x = -\lambda + 2$, $y = \lambda$, $z = -1$

Interpretación geométrica:

- Si $m \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $m = 1$, los tres planos se cortan en una recta.

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = 2, \; a = 1$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$ → El sistema es *compatible determinado*.

  Usando la regla de Cramer:

  $$x = \frac{a-1}{a-2}, \quad y = \frac{a-1}{a-2}, \quad z = -\frac{1}{a-2}$$

- Si $a = 1$:

  $$\left\{\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y = 0 \\ x + z = 1 \end{array}\right.$$

  Las ecuaciones 1.ª y 3.ª representan el mismo plano.

$$\begin{cases} x + \quad z = 1 \\ \quad y \quad = 0 \end{cases}$$

Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

Soluciones: $x = 1 - \lambda, \ y = 0, \ z = \lambda$

- Si $a = 2$:

$$\begin{cases} x + \quad\quad z = 1 \\ \quad y + \ z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Añadimos la 4.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

En este caso el sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = 1$, dos planos son coincidentes y se cortan en una recta con el tercero.
- Si $a = 2$, los planos se cortan dos a dos.

Forma matricial de un sistema

14 Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:

a) $\begin{cases} 2x + y \quad\quad = 2 \\ \quad y + 3z = 0 \\ 2x + y + \ z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + \ y - \ z = 3 \\ 2x + \ y + \ z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y \quad\quad = -1 \\ \quad y + z = -2 \\ x \quad\quad + z = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y + \ z = 3 \\ \quad 3y + \ z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y \quad\quad = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + \ z = 2 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1, \ y = 0, \ z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y-\ \ z=3\\ 2x+\ \ y+\ \ z=-2\\ x-2y-3z=1\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\1&-2&-3\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \ \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}-1&-7&-5\\-5&-2&-3\\2&3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&7&-5\\5&-2&3\\2&-3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Luego:

$$A\cdot X=B\ \rightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \rightarrow\ X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11\\22\\-22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Por tanto: $x=-1,\ y=2,\ z=-2$

c) $$\left.\begin{array}{r} x+y\qquad=-1\\ y+z=-2\\ x\qquad+z=3\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \ \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Luego:

$$A\cdot X=B\ \rightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \rightarrow\ X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $x=2,\ y=-3,\ z=1$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+\ \ z=3\\ 3y+\ \ z=4\\ x+2y+2z=4\end{array}\right\}\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 3 \neq 0 \ \rightarrow$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij}\longrightarrow Adj\,(A)\longrightarrow (Adj\,(A))^t\longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix}4&-1&-3\\2&1&0\\-1&1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&1&0\\-1&-1&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}\rightarrow\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}=A^{-1}$$

Luego:

$$A\cdot X=B\ \rightarrow\ A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\ \rightarrow\ X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $x=0,\ y=1,\ z=1$

15 Escribe en la forma habitual estos sistemas y resuélvelos si es posible:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{array}{l} x + 3y + 2x = 4 \\ x - \ y - \ z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x + 3y = 4 - 2\lambda \\ x - \ y = \lambda \end{array}\right\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 - 2\lambda & 3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 - \lambda}{-4} = \frac{4 + \lambda}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 - 2\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4 + 3\lambda}{-4} = \frac{4 - 3\lambda}{4}$$

Soluciones: $x = \dfrac{4 + \lambda}{4}$, $y = \dfrac{4 - 3\lambda}{4}$, $z = 1$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\}$ Comprobamos si tiene solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Como $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema es *incompatible*.

16 Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, y resuélvelo.

$$AX = B \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer término:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 4z = 11 \\ 3x + y \qquad = \ 5 \\ -x + \qquad z = \ 2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\phantom{\begin{matrix} 1 & -1 & 4 \end{matrix}}}_{A} \quad \underbrace{}_{B}$$

$|A| = 8$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

17 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Calculamos A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \to$ existe A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \to X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; es decir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

Para resolver

18 **Una panadería utiliza tres ingredientes A, B y C para elaborar tres tipos de tarta. La tarta T_1 se hace con 1 unidad de A, 2 de B y 2 de C. La tarta T_2 lleva 4 unidades de A, 1 de B y 1 de C. Y la T_3 necesita 2 unidades de A, 1 de B y 2 de C. Los precios de venta al público son 7,50 € la T_1; 6,50 € la T_2 y 7 € la T_3. Sabiendo que el beneficio que se obtiene con la venta de cada tarta es de 2 €, calcula cuánto le cuesta a la panadería cada unidad de A, B y C.**

Llamamos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a la matriz de precios por unidad de A, B y C, respectivamente.

La matriz que indica los ingredientes en relación con el tipo de tarta es:

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline T_1 & 1 & 2 & 2 \\ T_2 & 4 & 1 & 1 \\ T_3 & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

El gasto para cada tipo de tarta es:

$$\begin{pmatrix} 7,50 \\ 6,50 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,50 \\ 4,50 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular la solución mediante la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,50 \\ 4,50 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{La solución es: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,50 \\ 1 \\ 1,50 \end{pmatrix}$$

La unidad A cuesta 0,50 €, la unidad B cuesta 1 € y la unidad C cuesta 1,50 €.