

Ejercicios y problemas propuestos

Página 114

Para practicar

Método de Gauss

1 Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{cases} \rightarrow y = 1; z = \frac{19 - 3y}{2} = 8; x = 9 - 2y - z = -1$$

Solución: $x = -1, y = 1, z = 8$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{5} - \frac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \frac{14}{5} + \frac{2z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3z}{5} \end{cases}$$

Si tomamos $z = 5\lambda$, las soluciones son: $x = \frac{1}{5} - 3\lambda, y = \frac{7}{5} - \lambda, z = 5\lambda$

$$\text{c) } \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right\}$$

La segunda ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es incompatible.

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l|l} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$y = 3x; z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x; x = \lambda$

Soluciones: $x = \lambda, y = 3\lambda, z = 7\lambda$

2 Estudia y resuelve por el método de Gauss.

a)
$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

a)
$$\begin{aligned} & \left. \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 4 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinado.} \end{aligned}$$

Lo resolvemos:

$$\begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}; x = y + 3z + 2 = \frac{3}{2}$$

Solución: $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 0$

b)
$$\begin{aligned} & \left. \begin{cases} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (2.^a) \\ (1.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistema compatible indeterminado. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow x = 1 + y; z = -1 - y; y = \lambda$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, y = \lambda, z = -1 - \lambda$

c)
$$\begin{aligned} & \left. \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 5 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : 3 \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistema compatible determinado. Lo resolvemos:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

Solución: $x = 1, y = 1, z = -1$

$$\begin{aligned}
 & \text{d) } \left. \begin{aligned} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{aligned} \right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \\
 & \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ -4 \cdot (2.^a) + 3 \cdot (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Sistema *compatible indeterminado*. Lo resolvemos:

$$\left. \begin{aligned} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow t = 0; z = 0; x = y; y = \lambda$$

Soluciones: $x = \lambda, y = \lambda, z = 0, t = 0$

3 Resuelve por el método de Gauss.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \begin{cases} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array} \rightarrow \\
 & \rightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1/3) \cdot (3.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$(3.^a) \rightarrow 3z = 21 \rightarrow z = 7$$

$$(2.^a) \rightarrow y - 2z = -8 \rightarrow y - 14 = -8 \rightarrow y = 6$$

$$(1.^a) \rightarrow x + 2z = 11 \rightarrow x + 14 = 11 \rightarrow x = -3$$

Solución: $x = -3, y = 6, z = 7$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$(4.^a) \rightarrow -2t = 1 \rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$(3.^a) \rightarrow -2z - 2t = -2 \rightarrow -2z + 1 = -2 \rightarrow z = \frac{3}{2}$$

$$(2.^a) \rightarrow -2y - 2z = -1 \rightarrow -2y - 3 = -1 \rightarrow y = 1$$

$$(1.^a) \rightarrow x + y + z + t = 1 \rightarrow x + 1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \rightarrow x = -1$$

Solución: $x = -1, y = 1, z = \frac{3}{2}, t = -\frac{1}{2}$