6 Un nuevo criterio para saber si un sistema es compatible

Página 101

1 Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \ \to \ ran\,(A) = 2 \\ |A'| = 0 \qquad\qquad \to \ ran\,(A') = 2 \end{array}\right\}$ El sistema es *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \ \to \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z \quad\quad = 7 \\ 3x - y \quad\quad + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \ \to \ ran\,(A) = 2$

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \ \to \ ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$

El sistema es *incompatible*.

2 **Siguiendo el mismo proceso que en el ejercicio anterior, averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:**

a) $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x \quad\quad +z=2 \\ \quad\quad 2y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x \quad\quad +z=2 \\ \quad\quad 2y-z=5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+\ \ y+2z \quad\quad =7 \\ 3x-\ \ y \quad\quad +4t=1 \\ x-3y-4z+4t=-13 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x \quad\quad +z=2 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-6\neq 0$ y $|A|=0 \rightarrow ran(A)=2$

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$ (pues la 1.ª y la 3.ª columna son iguales) $\rightarrow ran(A')=2=ran(A)$

El sistema es *compatible*.

Observación: Como la 4.ª columna de A' y la 1.ª son iguales, necesariamente $ran(A')=ran(A)$; es decir, el sistema es *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x \quad\quad +z=2 \\ 2y-z=5 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran(A)=2$ (ver apartado a) de este ejercicio).

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-30\neq 0 \rightarrow ran(A')=3\neq ran(A)$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x+\ \ y+2z \quad\quad =\ \ 7 \\ 3x-\ \ y+ \quad\quad 4t=\ \ 1 \\ x-3y-4z+4t=-13 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$

Sabemos que $ran(A)=2$ (ver apartado c) del ejercicio anterior).

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix}=0 \rightarrow ran(A')=2=ran(A)$

El sistema es *compatible.*