INTEGRAL DEFINIDA

1.- INTRODUCCIÓN

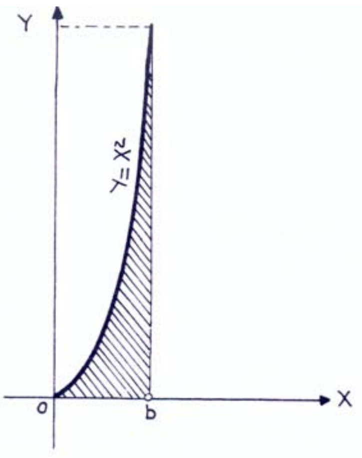
En este tema estudiaremos un concepto nuevo, el de integral definida. Aunque será necesario definirla de forma esencialmente complicada, la integral viene a formalizar un concepto sencillo, intuitivo: el de área. Ahora ya no nos debe causar sorpresa el encontrarnos con que la definición de un concepto intuitivo puede presentar grandes dificultades y ciertamente el “área” no es ninguna excepción a esto.

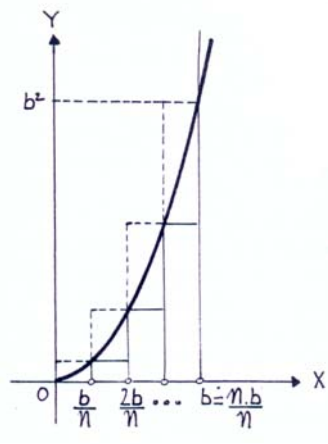
El cálculo de áreas de recintos planos es uno de los problemas fundamentales del Cálculo Infinitesimal y tiene sus orígenes remotos en la Grecia clásica. En geometría elemental se deducen fórmulas para la áreas de muchas figuras planas, pero un poco de reflexión hace ver que raramente se da una definición aceptable de área. El área de una región se define a veces como el número de cuadrados de lado unidad que caben en la región. Pero esta definición es totalmente inadecuada para todas las regiones con excepción de las más simples. Por ejemplo, el círculo de radio 1 tiene por área el número irracional π, pero no está claro en absoluto cual es el significado de “π cuadrados”. Incluso si consideramos un círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ cuya área es 1, resulta difícil explicar de qué manera un cuadrado unidad puede llenar este círculo, ya que no parece posible dividir el cuadrado unidad en pedazos que puedan ser yuxtapuestos de manera que formen un círculo.

Históricamente, el Cálculo Integral surgió de la necesidad de resolver el problema de la obtención del área de figuras planas. Los griegos lo abordaron, llegando a fórmulas para el área de polígonos, círculos, segmento de parábolas, etc. El método, que consistía en aproximar exhaustivamente la figura-recinto cuya área se deseaba hallar mediante polígonos de áreas conocidas, en el siglo XVI, se llamó “método exhaustivo” o “de exhaución”, original de Eudoxo (406 a.C. – 355 a.C.) y fue utilizado esporádicamente por Euclides hacia el año 300 a.C. y de forma sistemática por Arquímedes (286 a.C. – 212 a.C.).

Para conocer este método vamos a aplicarlo en el cálculo del área de un segmento de parábola, región limitada por el eje OX, la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = b$.

Arquímedes demostró que el área de esta región es $A = \frac{b^3}{3}$, es decir, la tercera parte del área del rectángulo de base el intervalo $[0,b]$ y de altura b^2.





Con ideas de Arquímedes, pero con notación moderna, veamos como se llega a ese resultado: para cada natural n dividimos el segmento $[0,b]$ en n partes iguales, cada una de longitud $\frac{b}{n}$. Sobre cada una de ellas construimos dos rectángulos, uno con la altura de la ordenada mínima (rectángulo inferior, por defecto o inscrito) y otro con la altura de la ordenada máxima (rectángulo superior, por exceso o circunscrito). Es claro que la suma de las áreas de los rectángulos "inferiores", $\underline{S}_n$, es menor que el área A del segmento parabólico, y que la suma de las áreas de los rectángulos "superiores", $\overline{S}_n$, es mayor que A, verificándose que:

$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\underline{S}_n = \frac{b}{n}\cdot 0 + \frac{b}{n}\cdot\frac{b^2}{n^2} + \frac{b}{n}\cdot\frac{(2b)^2}{n^2} + ... + \frac{b}{n}\cdot\frac{\left[(n-1)b\right]^2}{n^2} \leq A \leq \frac{b}{n}\cdot\frac{b^2}{n^2} + \frac{b}{n}\cdot\frac{(2b)^2}{n^2} + ... + \frac{b}{n}\cdot\frac{(nb)^2}{n^2} = \overline{S}_n$$

que se puede poner:

$\frac{b}{n}\cdot\left[0 + \frac{b^2}{n^2} + 2^2\cdot\frac{b^2}{n^2} + ... + (n-1)^2\cdot\frac{b^2}{n^2}\right] \leq A \leq \frac{b}{n}\cdot\left[\frac{b^2}{n^2} + 2^2\cdot\frac{b^2}{n^2} + ... + n^2\cdot\frac{b^2}{n^2}\right]$ o, lo que es lo mismo: $\frac{b^3}{n^3}\cdot\left[1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2\right] \leq A \leq \frac{b^3}{n^3}\cdot\left[1^2 + 2^2 + ... + n^2\right]$.

Arquímedes ya demostró que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. En estas condiciones, se llega a que las desigualdades anteriores equivalen a:

$$\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq A \leq \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\cdot b^3 \leq A \leq \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\cdot b^3$$ válido para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si se hace que el número n de divisiones crezca indefinidamente, es decir, si se toma límite cuando $n \to \infty$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\cdot b^3 \leq A \leq \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}\cdot b^3 \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{6n^2}\cdot b^3 \leq A \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}\cdot b^3$$

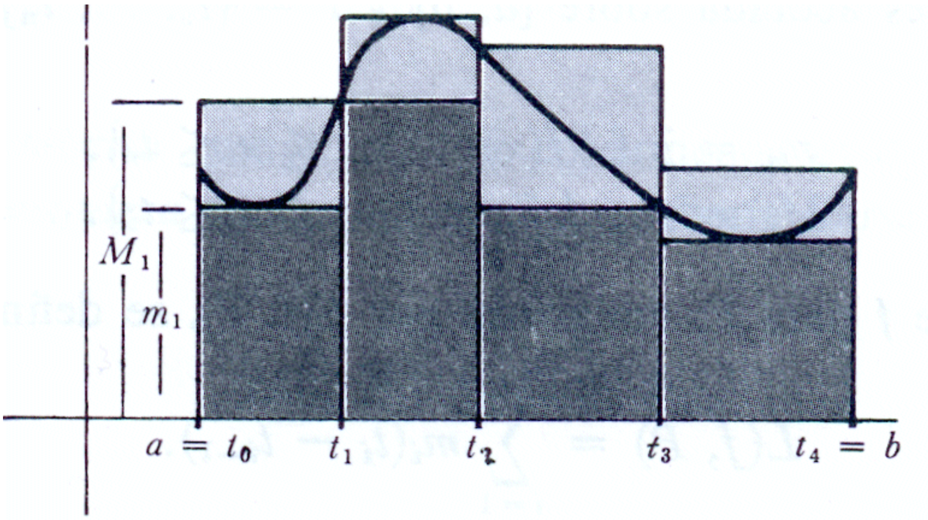
por tanto: $\frac{2}{6}\cdot b^3 \leq A \leq \frac{2}{6}\cdot b^3$, con lo que $A = \frac{b^3}{3}$.

Apoyándonos en el método de exhaución expuesto antes, podemos pensar en medir áreas de figuras más generales, aproximando su valor mediante sumas de áreas de rectángulos por defecto y sumas de áreas de rectángulos por exceso y luego tomando límites de alguna manera.

Los matemáticos del siglo XVII (Newton, Leibniz, etc.) introdujeron el concepto de integral definida de una función $f(x)$, concepto que más tarde fue mejorado por Cauchy (1789–1857) y por Riemann (1826-1866).

2.- NOCIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO $[a,b]$

La idea que sostiene la definición que vamos a dar se indica en la siguiente figura.



El intervalo $[a,b]$ ha sido dividido en cuatro subintervalos $[t_0,t_1]$, $[t_1,t_2]$, $[t_2,t_3]$ y $[t_3,t_4]$ por medio de números t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 con $a=t_0<t_1<t_2<t_3<t_4=b$ (la numeración de los subíndices empieza en 0 de modo que el subíndice mayor será igual al número de subintervalos).

Sobre el primer intervalo $[t_0,t_1]$ la función f tiene el valor mínimo m_1 y el valor máximo M_1; análogamente, sea m_i el valor mínimo y M_i el valor máximo de f sobre el intervalo i-ésimo $[t_{i-1},t_i]$.

La suma $\underline{S}=m_1(t_1-t_0)+m_2(t_2-t_1)+m_3(t_3-t_2)+m_4(t_4-t_3)$ representa el área total de los rectángulos que quedan dentro de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas verticales x=a y x=b, conviene denotar esta región por $R(f,a,b)$.

Igualmente, la suma $\overline{S}=M_1(t_1-t_0)+M_2(t_2-t_1)+M_3(t_3-t_2)+M_4(t_4-t_3)$ representa el área total de los rectángulos que contienen la región $R(f,a,b)$.

El principio que nos va a guiar en nuestro intento de definir el área de $R(f,a,b)$ será la observación de que *A* tiene que satisfacer $\underline{S}\leq A$ y $A\leq\overline{S}$ y que esto debe ser verdad, *cualquiera que sea la división que se haga del intervalo* $[a,b]$.

Sea f una función real de variable real definida y acotada en $[a,b]$.

<u>Definición:</u>

Se llama partición de un intervalo cerrado $[a,b]$ a un conjunto ordenado y finito de puntos de $[a,b]$ de los cuales el primero es a y el último es b.

El conjunto $P=\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ tal que $a=x_0<x_1<x_2<........<x_n=b$ es una partición de $[a,b]$.

Se llama diámetro de la partición P al número real $\delta(P)=\max\{x_i - x_{i-1}\}_{i=1,2,3,......,n}$.
A veces, por comodidad y sin que suponga pérdida de generalidad, se toman particiones de tal manera que los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ son todos de la misma longitud. En este caso, el diámetro de la partición es $\delta(P)=\dfrac{b-a}{n}$.

El intervalo $[a,b]$, mediante la partición P, queda subdividido en n subintervalos; en cada uno de ellos definimos los números reales:

$m_i = inf\left\{ f(x) \ / \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$

$M_i = sup\left\{ f(x) \ / \ x \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$, que existen por ser f acotada.

Si la función f fuese continua, estos números m_i y M_i serían respectivamente el mínimo y el máximo de f en $[x_{i-1}, x_i]$.

Definición:

Se llama suma inferior de $f(x)$ para la partición P del intervalo $[a,b]$, y se designa por $\underline{S}(f,P)$ a la suma:

$$\underline{S}(f,P)=m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+........+m_n(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta x_i$$

Si f es positiva en $[a,b]$ se observa que, geométricamente, la suma inferior $\underline{S}(f,P)$ mide la suma de las áreas de los rectángulos inscritos cuyas bases son los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y cuyas alturas miden m_i.

Definición:

Se llama suma superior de $f(x)$ para la partición P del intervalo $[a,b]$, y se designa por $\overline{S}(f,P)$ a la suma:

$$\overline{S}(f,P)=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+........+M_n(x_n-x_{n-1})=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta x_i$$

Si f es positiva en $[a,b]$ se observa que, geométricamente, la suma superior $\overline{S}(f,P)$ mide la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos cuyas bases son los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ y cuyas alturas miden M_i.

Una cosa es evidente en relación con las sumas inferiores y superiores: si P es una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$, entonces $\underline{S}(f,P)\le\overline{S}(f,P)$, puesto que

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \quad , \quad \overline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1}),$$

y para cada i tenemos que $m_i(x_i-x_{i-1})\le M_i(x_i-x_{i-1})$.

Por otra parte, debería cumplirse otra cosa menos evidente: si P_1 y P_2 son dos particiones cualesquiera del intervalo $[a,b]$, entonces parece lógico pensar que

$$\underline{S}(f,P_1) \leq \overline{S}(f,P_2)$$

puesto que $\underline{S}(f,P_1)$ *debería ser* $\leq$ área $R(f,a,b)$, y $\overline{S}(f,P_2)$ *debería ser* $\geq$ área $R(f,a,b)$. Esta observación no demuestra nada (puesto que el "área de $R(f,a,b)$" no ha sido todavía ni siquiera definida), pero sí indica que si hemos de albergar alguna esperanza de poder definir el área de $R(f,a,b)$, lo primero que debemos conseguir es demostrar que $\underline{S}(f,P_1) \leq \overline{S}(f,P_2)$. Esto depende de un Lema referente al comportamiento de las sumas inferiores y superiores al añadir más puntos a una partición.

Definición:

Se dice que una partición Q de $[a,b]$ es más fina que otra partición P de $[a,b]$ si se verifica que todo punto de P está en Q. Se indica escribiendo $P \leq Q$. Hay que hacer constar que no siempre son comparables dos particiones.

Ahora estamos en condiciones de enunciar un Lema y un Teorema de los que omitimos su demostración por no extendernos demasiado.

Lema:

Si P y Q son dos particiones de $[a,b]$ y Q es más fina que P se tiene que

$$\underline{S}(f,P) \leq \underline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,Q) \leq \overline{S}(f,P)$$

Teorema:

Sean P_1 y P_2 particiones de $[a,b]$, y sea f una función acotada sobre $[a,b]$. Entonces $\underline{S}(f,P_1) \leq \overline{S}(f,P_2)$.

Esto nos dice que cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior independientemente de la partición considerada, lo cual era intuitivo para funciones positivas.

El conjunto de las sumas inferiores de todas las particiones de $[a,b]$, $\{\underline{S}(f,P)\}$, es no vacío y está acotado superiormente por cualquier suma superior; por tanto, por el Axioma del extremo, existe $Sup\{\underline{S}(f,P)\}$.

Análogamente, el conjunto $\{\overline{S}(f,P)\}$ es no vacío y está acotado inferiormente por cualquier suma inferior; por el mismo Axioma del extremo se tiene que existe $Inf\{\overline{S}(f,P)\}$, y se verifica

$$Sup\{\underline{S}(f,P)\} \leq Inf\{\overline{S}(f,P)\}$$

Definición:

El número $Sup\{\underline{S}(f,P)\}$ se llama integral inferior de f en $[a,b]$ y se escribe así:

$$\underline{I}(f,[a,b]) = Sup\{\underline{S}(f,P)\}$$

Definición:

El número $Inf\left\{\overline{S}\left(f,P\right)\right\}$ se llama integral superior de f en $\left[a,b\right]$ y se escribe así:

$$\overline{I}\left(f,\left[a,b\right]\right)=Inf\left\{\overline{S}\left(f,P\right)\right\}$$

Definición: *(1)*

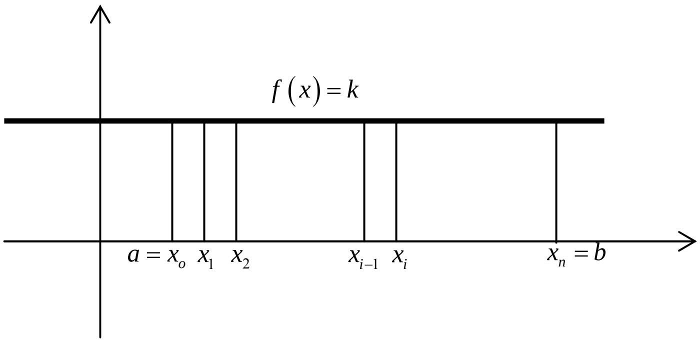
Una función $f\left(x\right)$ definida y acotada en $\left[a,b\right]$ se dice que es integrable (en el sentido de Riemann) sobre $\left[a,b\right]$ cuando $\underline{I}\left(f,\left[a,b\right]\right)=\overline{I}\left(f,\left[a,b\right]\right)$.

En este caso, este **número** común recibe el nombre de integral definida de f sobre $\left[a,b\right]$ y se escribe:

$$I\left(f,\left[a,b\right]\right) \quad \text{o} \quad \int_a^b f\left(x\right)dx.$$

Ejemplos

1.- Sea $f\left(x\right)=k$ para todo $x\in\left[a,b\right]$, siendo $k\in\mathbb{R}$.



Si $P=\left\{x_0,x_1,x_2,.....,x_n\right\}$ es una partición cualquiera de $\left[a,b\right]$, entonces $m_i=M_i=k$ para todo i y así:

$$\underline{S}\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}k\left(x_i-x_{i-1}\right)=k\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)=k\left(b-a\right), \text{ y}$$

$$\overline{S}\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}M_i\left(x_i-x_{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}k\left(x_i-x_{i-1}\right)=k\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-x_{i-1}\right)=k\left(b-a\right).$$

En este caso todas las sumas inferiores y superiores son iguales y

$$Sup\left\{\underline{S}\left(f,P\right)\right\}=Inf\left\{\overline{S}\left(f,P\right)\right\}=k\left(b-a\right).$$

Se tiene, pues, que la función $f\left(x\right)=k$ es integrable en $\left[a,b\right]$ y su integral vale:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b kdx=k\left(b-a\right).$$

2.- Sea la función de Dirichlet, definida de la siguiente forma:

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ x\ es\ irracional\\ 1 & si\ x\ es\ racional\end{cases}$$

Si $P=\{x_0,x_1,x_2,.....,x_n\}$ es una partición cualquiera de $[a,b]$, se tiene que $m_i=0$ pues en $[x_{i-1},x_i]$ siempre existe algún número irracional, y $M_i=1$ puesto que en $[x_{i-1},x_i]$ siempre existe algún número racional.

Así, $\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot(x_i-x_{i-1})=0$ y

$$\overline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=(b-a)$$

En consecuencia, $Sup\{\underline{S}(f,P)\}=0$ e $Inf\{\overline{S}(f,P)\}=b-a$ y f no es integrable en $[a,b]$.

3.- LA INTEGRAL DEFINIDA CONSIDERADA COMO UN LÍMITE

Sea $f(x)$ acotada en $[a,b]$. Si en cada subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ de una partición P se elige un punto cualquiera ξ_i, entonces $m_i\le f(\xi_i)\le M_i$. Resulta, pues que:

$m_i(x_i-x_{i-1})\le f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\le M_i(x_i-x_{i-1})$, es decir,

$m_i\Delta x_i\le f(\xi_i)\Delta x_i\le M_i\Delta x_i$, y sumando

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i=\overline{S}(f,P)$$

Si se toma $P_1\le P_2\le P_3\le.........\le P_n$, una sucesión cualquiera de particiones de $[a,b]$ en la que el número de puntos de cada partición va aumentando de tal manera que el límite de sus diámetros sea cero, $\lim_{n\to\infty}\delta(P_n)=0$, se tiene que:

$$\lim_{\delta(P_n)\to 0}\underline{S}(f,P_n)\le\lim_{\delta(P_n)\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i\le\lim_{\delta(P_n)\to 0}\overline{S}(f,P)$$

Por lo tanto, f es integrable precisamente si existe el $\lim_{\delta(P_n)\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ (también denotado $\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$).

Esto nos permite dar una nueva definición de la integral definida:

Definición:

Una función $f(x)$ definida y acotada en $[a,b]$ se dice que es integrable (en el sentido de Riemann) sobre $[a,b]$ cuando existe $\lim_{\delta(P_n)\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$, independientemente de la sucesión de particiones elegida y del punto ξ_i considerado en $[x_{i-1},x_i]$

En este caso, este **número** recibe el nombre de integral definida de f sobre $[a,b]$ y se escribe:

$$I\left(f,[a,b]\right) \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x)\,dx .$$

Esta última versión de la integral definida, $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum f(\xi_i)\Delta x_i$, justifica el empleo del signo $\int$, introducido por Leibniz en 1675, una "ese" alargada y estilizada como indicativo de que se está realizando una "suma" de infinitos términos.

En toda la discusión anterior se ha supuesto $a<b$. Cuando $a=b$ se toma como convenio $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

4.- INTEGRABILIDAD DE FUNCIONES

Teorema: (Criterio de integrabilidad de Riemann)
Sea f una función acotada sobre $[a,b]$. Entonces f es integrable en $[a,b]$ precisamente si para todo número real $\varepsilon>0$ existe una partición P tal que $\overline{S}(f,P)-\underline{S}(f,P)<\varepsilon$

El teorema sólo nos proporciona de otro modo la definición de integrabilidad; este criterio es mucho más operativo que la definición (1) puesto que ya no tendremos que usar supremos e ínfimos.

Apoyándonos en el teorema anterior podríamos demostrar dos importantes proposiciones.

Proposición 1:
Las funciones acotadas y monótonas en $[a,b]$ son integrables.

Proposición 2:
Las funciones continuas en $[a,b]$ son integrables.

Evitamos las demostraciones.

5.- PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida verifica las siguientes propiedades:

1-. Linealidad respecto del integrando: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a,b]$ también lo es $\alpha f(x)+\beta g(x)$ para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y se tiene:

$$\int_a^b \left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

2.- Aditividad respecto del intervalo de integración: Sea $f(x)$ una función integrable en un intervalo $[a,b]$. Si c es tal que $a<c<b$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Recíprocamente, si $f(x)$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a,b]$.

En ambos casos se verifica que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

3-. Comparación: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en $[a,b]$ y $g(x)\le f(x)$ para todo $x\in[a,b]$ se verifica:

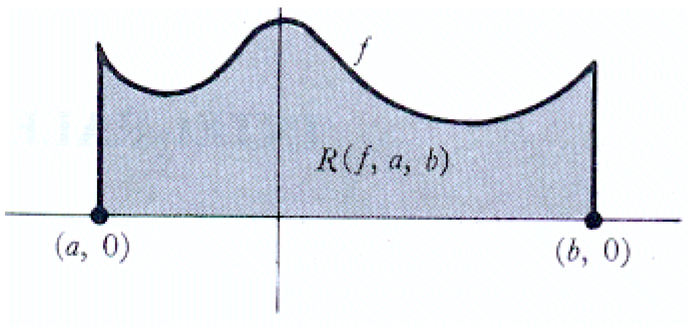
$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

4.- Conmutación del valor absoluto: Si $f(x)$ es una función integrable en un intervalo $[a,b]$ también lo es $|f(x)|$ y se verifica que:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

6.- INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando f es no negativa e integrable en $[a,b]$, el área de la región limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$ (área de $R(f,a,b)$) es la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.



Área de $R(f,a,b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Cuando f es negativa e integrable en $[a,b]$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ expresa el área del recinto, con signo negativo. En este caso el área de $R(f,a,b)$ vale:

$$\text{Área de } R(f,a,b) = \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$$

7.- TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES

Como si se tratara de una media aritmética normal y corriente, si tomamos **todos** los valores de una función f en un intervalo $[a,b]$ donde sea integrable (considerados como "barras verticales" de altura $f(x)$ sobre cada punto x del intervalo) y los "sumamos", completamos la región $R(f,a,b)$, con lo que obtenemos $\int_a^b f(x)dx$. Si esta "suma" la dividimos por el "número de valores del intervalo" $(b-a)$ (longitud del intervalo) llegamos a la media de f en $[a,b]$.

Definición:

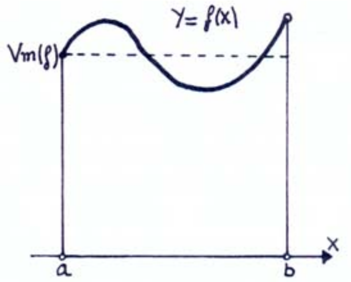
Si una función f es integrable en $[a,b]$, el valor medio de f en $[a,b]$ se define por:

$$V_m(f) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Cuando f es no negativa, la fórmula anterior se puede escribir

$$V_m(f)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

y expresa que el rectángulo de base $[a,b]$ y altura $V_m(f)$ tiene el mismo área que la región bajo la curva $R(f,a,b)$.



El problema que se plantea ahora es si el valor medio $V_m(f)$ es alcanzado por f en algún punto de $[a,b]$. Es intuitivo que, si f es continua, si se alcanza.

Teorema: *(del valor medio para integrales)*

Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$.

Demostración:

Consideramos la partición $P=\{a,b\}$ de $[a,b]$ (un solo intervalo, sin puntos intermedios); se tiene que

$$\underline{S}(f,P)=m(b-a) \qquad y \qquad \overline{S}(f,P)=M(b-a)$$

siendo m y M el mínimo y el máximo de f en $[a,b]$ respectivamente.

Como $\underline{S}(f,P)\leq\int_a^b f(x)dx\leq\overline{S}(f,P)$, se puede escribir:

$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$, dividiendo por el número positivo $b-a$ tenemos

$m\leq\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx\leq M$, y aplicando la *Propiedad de Darboux*, existe al menos un punto $c\in(a,b)$ tal que

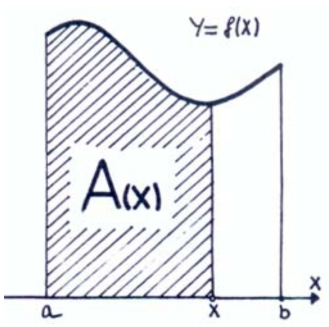
$$f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

8.- TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL. REGLA DE BARROW

En este apartado relacionaremos las primitivas de una función $f(x)$ con la integral definida de $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, lo que nos permitirá obtener un método de cálculo de la integral definida.

Sea f integrable en cada subintervalo $[a,x]$ de $[a,b]$, es decir, tal que existe la integral $\int_a^x f(t)dt$ para cada $x\in[a,b]$. Entonces está definida la función $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ para todo $x\in[a,b]$; efectivamente es una función real porque asigna a cada número real x un único número real que es el valor de la integral.

Cuando $f(x)\geq 0$, $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ nos va dando la medida del área de la región limitada por la función, el eje OX entre las abscisas a y x.



Teorema:

Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$, la función $A(x)=\int_a^x f(t)dt$ es continua en $[a,b]$.

Demostración:

Sea $x_0 \in (a,b)$, veamos que $\lim_{x \to x_0} A(x) = A(x_0)$

$$A(x)-A(x_0)=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^a f(t)\,dt+\int_a^x f(t)\,dt=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Como f está acotada en $[a,b]$, ya que f es integrable, existe $M>0$ tal que $-M \le f(t) \le M$ para todo $t \in [a,b]$.

Si $x > x_0$, integramos las desigualdades anteriores en el intervalo $[x_0, x]$ y obtenemos

$$-M(x-x_0) \le \int_{x_0}^x f(t)\,dt \le M(x-x_0)$$

$$-M(x-x_0) \le A(x)-A(x_0) \le M(x-x_0)$$

Si $x < x_0$, integramos las desigualdades en el intervalo $[x, x_0]$ y obtenemos

$$-M(x_0-x) \le A(x_0)-A(x) \le M(x_0-x)$$

En ambos casos, al tomar límites cuando $x \to x_0$ resulta

$\lim_{x \to x_0} \left[A(x)-A(x_0)\right]=0$, es decir $\lim_{x \to x_0} A(x)=A(x_0)$

Cuando x_0 sea un extremo del intervalo, los límites se consideran laterales y la demostración es análoga.

Teorema: *(Fundamental del cálculo integral)*

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ entonces la función $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en $[a,b]$ y $A'(x)=f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, es decir, $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

Demostración:

Sean x y $x+h$ puntos de (a,b), entonces

$$A(x+h)-A(x)=\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_x^a f(t)\,dt+\int_a^{x+h} f(t)\,dt=\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Por lo tanto: $\dfrac{A(x+h)-A(x)}{h}=\dfrac{1}{h}\cdot\int_x^{x+h} f(t)\,dt=f(\xi)$ con $\xi \in (x, x+h)$, esto es por el teorema del valor medio para integrales.

Tomando límites cuando $h \to 0$ en la igualdad obtenemos

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)=f\left(\lim_{h\to 0}\xi\right)=f(x)$$

Las últimas igualdades se producen porque el límite conmuta con las funciones continuas y f lo es; posteriormente como $\xi \in (x, x+h)$, cuando $h \to 0$ entonces $\xi \to x$.

En consecuencia $A'(x)$ existe y coincide con $f(x)$.

Cuando x sea un extremo del intervalo, los límites se consideran laterales y la demostración es análoga.

Teorema: *(Regla de Barrow)*

Sea $f(x)$ continua en un intervalo I y sea $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$ en I. Entonces, para cada par de puntos a y b de I se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demostración:

Como $A(x) = \int_a^x f(t)dt$ y $F(x)$ son primitivas de $f(x)$ en I, ambas funciones difieren en una constante, es decir $A(x) - F(x) = k$.

Tomando $x = a$, queda: $A(a) - F(a) = k$, como $A(a) = 0$ entonces $-F(a) = k$

Tomando $x = b$, queda: $A(b) - F(b) = k$; $A(b) - F(b) = -F(a)$, con lo que obtenemos que $A(b) = F(b) - F(a)$, o lo que es lo mismo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

De esta fórmula, llamada regla de Barrow, se deduce la importancia decisiva de conocer alguna primitiva de $f(x)$ para poder calcular la integral definida.

CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Sea $y = f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y sea $x = g(t)$ otra función continua y estrictamente monótona en $[t_0, t_1]$ que verifica:

- $g(t_0) = a$, $g(t_1) = b$
- $g'(t)$ *es continua en* $[t_0, t_1]$
- $f[g(t)]$ *está definida en* $[t_0, t_1]$

Entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f[g(t)] \cdot g'(t)dt$

Si la curva viene dada en ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Haciendo los cambios pertinentes en la integral tenemos que

$$\int_a^b y\,dx = \int_{t_0}^{t_1} y(t) \cdot x'(t)dt \quad , \quad \text{donde} \quad a = x(t_0) \quad , \quad b = x(t_1)$$