3 Sencillas operaciones con límites

Página 210

1 **Todas estas propiedades que acabamos de presentar son muy sencillas y razonables. Y se pueden enunciar en los siguientes términos:**

1. *El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.*

Haz otro tanto con las propiedades 2 a 7 y reflexiona sobre las restricciones que se imponen en algunas de ellas, de modo que las veas razonables (por ejemplo: ¿por qué $b \neq 0$ en la propiedad 4?, ¿por qué $f(x) > 0$ en la propiedad 5?, …).

2. El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites.
3. El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.
4. El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea 0 (para que no se produzca una división entre 0).
5. El límite de la potencia de dos funciones es igual a la potencia de sus límites, siempre que la base de la potencia sea positiva (para que tenga sentido la potencia de exponente real).
6. El límite de la raíz de una función es igual a la raíz de su límite. En el caso de que la potencia sea de índice par, además, la función debe ser no negativa (para que se pueda hallar dicha potencia).
7. El límite del logaritmo de una función es igual al logaritmo de su límite (para que tenga sentido el límite y el resultado, es necesario que tanto la función como su límite sean positivos).

Página 211

2 **Si, cuando $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) \to 4$, $h(x) \to -\infty$, $u(x) \to 0$, asigna, siempre que puedas, límite cuando $x \to +\infty$ a las expresiones siguientes:**

a) $f(x) - h(x)$	**b)** $f(x)^{f(x)}$	**c)** $f(x) + h(x)$	**d)** $f(x)^x$	**e)** $f(x) \cdot h(x)$
f) $u(x)^{u(x)}$	**g)** $f(x)/h(x)$	**h)** $[-h(x)]^{h(x)}$	**i)** $g(x)^{h(x)}$	**j)** $u(x)/h(x)$
k) $f(x)/u(x)$	**l)** $h(x)/u(x)$	**m)** $g(x)/u(x)$	**n)** $x + f(x)$	**ñ)** $f(x)^{h(x)}$
o) $x + h(x)$	**p)** $h(x)^{h(x)}$	**q)** x^{-x}	**r)** $f^2(x) + h^2(x)$	**s)** $f^2(x) - h^2(x)$

a) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - h(x)) = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)^{f(x)} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indeterminación.

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x)^x = +\infty^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim_{x \to +\infty} (f(x) \cdot h(x)) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

f) $\lim_{x \to +\infty} u(x)^{u(x)} = (0)^{(0)} \to$ Indeterminación.

g) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{(+\infty)}{(-\infty)} \to$ Indeterminación.

h) $\lim_{x \to +\infty} [-h(x)]^{h(x)} = [+\infty]^{-\infty} = 0$

i) $\lim_{x \to +\infty} g(x)^{h(x)} = 4^{-\infty} = 0$

j) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{u(x)}{h(x)} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

k) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{u(x)} = \dfrac{+\infty}{(0)} = \pm\infty$

l) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{u(x)} = \dfrac{-\infty}{(0)} = \pm\infty$

m) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{u(x)} = \dfrac{4}{(0)} = \pm\infty$

n) $\lim_{x \to +\infty} (x + f(x)) = +\infty + (+\infty) = +\infty$

ñ) $\lim_{x \to +\infty} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{-\infty} = 0$

o) $\lim_{x \to +\infty} (x + h(x)) = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indeterminación.

p) $\lim_{x \to +\infty} h(x)^{h(x)} = (-\infty)^{-\infty} \to$ No existe.

q) $\lim_{x \to +\infty} x^{-x} = (+\infty)^{-\infty} = \dfrac{1}{\infty^{\infty}} = 0$

r) $\lim_{x \to +\infty} (f^2(x) + h^2(x)) = (+\infty)^2 + (-\infty)^2 = +\infty$

s) $\lim_{x \to +\infty} (f^2(x) - h^2(x)) = (+\infty)^2 - (-\infty)^2 = (+\infty) - (+\infty) \to$ Indeterminación.

4 Indeterminaciones

Página 212

1 **Para $x \to 4$ se dan los siguientes resultados:**

$$f(x) \to +\infty,\ g(x) \to 4,\ h(x) \to -\infty,\ u(x) \to 0$$

¿Cuáles de las siguientes funciones son indeterminaciones cuando $x \to 4$? En cada caso, si es indeterminación, di de qué tipo y, si no lo es, di cuál es el límite:

a) $f(x) + h(x)$ **b)** $f(x)/h(x)$ **c)** $f(x)^{-h(x)}$ **d)** $f(x)^{h(x)}$

e) $f(x)^{u(x)}$ **f)** $u(x)^{h(x)}$ **g)** $[g(x)/4]^{f(x)}$ **h)** $g(x)^{f(x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 4} [f(x) + h(x)] = (+\infty) + (-\infty) \to$ Indetermninación.

b) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{+\infty}{-\infty} \to$ Indeterminación.

c) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{-h(x)} = (+\infty)^{(+\infty)} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{h(x)} = (+\infty)^{(-\infty)} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)^{u(x)} = (+\infty)^{(0)} \to$ Indeterminación

f) $\lim\limits_{x \to 4} u(x)^{h(x)} = (0)^{(-\infty)} = \pm\infty$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \left[\dfrac{g(x)}{4}\right]^{f(x)} = (1)^{(+\infty)} \to$ Indeterminación

h) $\lim\limits_{x \to 4} g(x)^{f(x)} = (4)^{(+\infty)} = +\infty$

5 Comparación de infinitos. Aplicación a los límites cuando $x \to \pm\infty$

Página 213

1 Indica cuáles de las siguientes expresiones son infinitos $(\pm\infty)$ cuando $x \to +\infty$:

a) $3x^5 - \sqrt{x} + 1$ **b)** $0{,}5^x$ **c)** $-1{,}5^x$

d) $log_2\, x$ **e)** $\dfrac{1}{x^3+1}$ **f)** $\sqrt{x}$

g) 4^x **h)** 4^{-x} **i)** -4^x

Son infinitos cuando $x \to +\infty$ las expresiones a), c), d), f), g) e i).

No lo son las expresiones b), e) y h).

2 a) Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

$log_2\, x \quad \sqrt{x} \quad x^2 \quad 3x^5 \quad 1{,}5^x \quad 4^x$

b) Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcula:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2\, x}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x}$$

a) 4^x; $1{,}5^x$; $3x^5$; x^2; $\sqrt{x}$; $log_2 x$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{log_2\, x}{\sqrt{x}} = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{1{,}5^x} = 0$$

6 Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$

Página 215

1 Sin operar, di el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right)$

b) $(x^2 - 2^x)$

c) $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}$

d) $3^x - 2^x$

e) $5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}$

f) $\sqrt{x} - \log_5 x^4$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 - \sqrt[3]{2x+1}\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2^x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - 2^x) = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5^x - \sqrt[3]{x^8 - 2}) = +\infty$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x} - \log_5 x^4) = +\infty$

2 Calcula el límite, cuando $x \to +\infty$, de las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{3x^3+5}{x+2} - \dfrac{4x^3-x}{x-2}$

b) $\dfrac{x^3}{2x^2+1} - \dfrac{x}{2}$

c) $\dfrac{3x+5}{2} - \dfrac{x^2-2}{x}$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}$

e) $2x - \sqrt{x^2+x}$

f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^3+5}{x+2} - \frac{4x^3-x}{x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x^3+5)(x-2) - (4x^3-x)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^4 - 6x^3 + 5x - 10 - 4x^4 - 8x^3 + x^2 + 2x}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 - 14x^3 + x^2 + 7x - 10}{x^2 - 4} = -\infty$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2+1} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - x(2x^2+1)}{2(2x^2+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 2x^3 - x}{4x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{4x^2+2} = 0$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x+5}{2} - \frac{x^2-2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+5x-2x^2+4}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+5x+4}{2x} = +\infty$$

d) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-x^2-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

e) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2x - \sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2x - \sqrt{x^2+x}\right)\left(2x + \sqrt{x^2+x}\right)}{2x + \sqrt{x^2+x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - x}{2x + \sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

f) $$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0$$