Ejercicio 1.

Prueba que la ecuación $x \cdot \ln x = 2$ tiene alguna solución real y encuéntrala con una cifra decimal exacta.

Definimos la función $f(x) = x \cdot \ln x - 2$, $f(x)$ *es una función continua en el intervalo* $[2,3]$ *por ser suma y producto de funciones continuas en* $\mathbb{R}^+$, *y se cumple que* $f(2) < 0$ *y* $f(3) > 0$, (*estamos en las condiciones del teorema de Bolzano*) $\Rightarrow \exists\, x_0 \in (2,3)$ *tal que* $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ *es solución de la ecuación* $x \cdot \ln x - 2 = 0$.

Aproximemos dicha solución a una cifra decimal exacta:

$$\begin{cases} f(2) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2,3) \;/\; \begin{cases} f(2) < 0 \\ f(2'5) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2, 2'5) \;/\; \begin{cases} f(2'3) < 0 \\ f(2'5) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2'3, 2'5) \;/\; \begin{cases} f(2'3) < 0 \\ f(2'4) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \in (2'3, 2'4). \text{ Entonces } x_0 \simeq 2'3.$$

Ejercicio 2.

Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x) = \left(x + \sqrt{x}\right)^5 \quad \Rightarrow f'(x) = 5\left(x + \sqrt{x}\right)^4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\right) \Rightarrow f'(x) = 5\left(x + \sqrt{x}\right)^4 \cdot \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}\right)$

2) $f(x) = \ln(senx) \cdot \sec x$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \text{derivamos como cociente}, \; (\sec x)' = \frac{senx}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{senx} \cdot \cos x \cdot \sec x + \ln(senx) \cdot \frac{senx}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{senx} + \frac{senx \cdot \ln(senx)}{\cos^2 x}$$

3) $f(x) = \left(arctg\, \frac{x+1}{x-1}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(arctg\, \frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = -2\left(arctg\, \frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$

4) $f(x) = x^{sen^2 x}$

$$\Rightarrow \ln y = \ln x^{sen^2 x} \Rightarrow \ln y = sen^2 x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2senx \cdot \cos x \cdot \ln x + \left(sen^2 x\right) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \left(sen2x \cdot \ln x + \frac{sen^2 x}{x}\right) \cdot x^{sen^2 x}$$

Ejercicio 3.

Clasifica las discontinuidades de las funciones:

$a)\ \ f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{x^2+x} & si\ x<0\\[2mm] \dfrac{x^2+x}{x^2-x} & si\ x\geq 0\end{cases}\qquad posibles\ \ discontinuidades\ en\ x=-1,\ x=0\ \ y\ \ x=1.$$

Analizamos el tipo de discontinuidad en cada punto.

$$x=-1\ \Rightarrow\ f(-1)\ no\ existe,\ \lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-1}{x+1}\to\dfrac{-2}{0^-}\to+\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x-1}{x+1}\to\dfrac{-2}{0^+}\to-\infty\end{cases}\Rightarrow en\ x=-1\ hay\ una\ discontinuidad\ de\ tipo\ infinito.$$

$$x=1\ \Rightarrow\ f(1)\ no\ existe,\ \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}\to\dfrac{2}{0^-}\to-\infty\\[2mm] \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}\to\dfrac{2}{0^+}\to+\infty\end{cases}\Rightarrow en\ x=1\ hay\ una\ discontinuidad\ de\ tipo\ infinito.$$

$$x=0\ \Rightarrow\ f(0)\ no\ existe,\ \lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x-1}{x+1}\to\dfrac{-1}{1}\to-1\\[2mm] \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2+x}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+1}{x-1}\to\dfrac{1}{-1}\to-1\end{cases}\Rightarrow en\ x=0\ \ hay\ una\ discontinuidad\ evitable.$$

$b)\ \ g(x)=7-|2x-3|$

$$g(x)=\begin{cases}7-(-2x+3) & si\ x<\dfrac{3}{2}\\[2mm] 7-(2x-3) & si\ x\geq\dfrac{3}{2}\end{cases}\ \Rightarrow\ g(x)=\begin{cases}2x+4 & si\ x<\dfrac{3}{2}\\[2mm] 10-2x & si\ x\geq\dfrac{3}{2}\end{cases}\ ,\ cada\ rama\ es\ continua\ en\ el\ intervalo\ que\ está\ definida.$$

$$Veamos\ si\ g(x)\ es\ continua\ en\ x=\frac{3}{2}.\qquad\qquad g\left(\frac{3}{2}\right)=10-2\cdot\frac{3}{2}=7$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}} g(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-}(2x+4)\to 7\\[2mm] \lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+}(10-2x)\to 7\end{cases}\Rightarrow en\ x=\frac{3}{2}\ \ la\ \ función\ es\ continua\Rightarrow g(x)\ no\ tiene\ discontinuidades.$$

Ejercicio 4.

Supongamos que f es continua para todo número real x, excepto para $x=6$. Si $g(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ ¿para qué valores de x puede asegurarse la continuidad de la función $f\circ g$?

Para que la función $(f\circ g)(x)$ sea continua en un punto x_0, g debe ser continua en x_0 y f continua en el punto $g(x_0)$.

Con estas premisas, como $g(x)=\dfrac{3x}{x-2}$, g es continua en todos los reales salvo en $x=2 \Rightarrow f\circ g$ tampoco es continua en $x=2$.

Como f debe ser continua en el punto $g(x_0)$, $g(x_0)$ tiene que ser distinto de 6

$\dfrac{3x}{x-2}=6 \Rightarrow 3x=6x-12 \Rightarrow x=4$. *Entonces la función $f\circ g$ no es continua en $x=4$.*

Conclusión: $(f\circ g)(x)$ no es continua en $x=2$ puesto que en ese punto no es continua la función g, $(f\circ g)(2)=f(g(2))$

$(f\circ g)(x)$ no es continua en $x=4$ puesto que $(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(6)$ y f no es continua en $x=6$.

$f\circ g$ es continua en $\mathbb{R}-\{2,4\}$

Ejercicio 5.

Calcula:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}$$

a) Indeterminación del tipo 1^∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2+n}{1+n}-1\right)^{1-5n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{1-5n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1+n}\right)^{(1+n)\cdot\frac{1-5n}{1+n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-5n}{1+n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-5}{\frac{1}{n}+1}}=e^{-5}$$

b) Indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty\cdot(\infty-\infty)}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x^3+x^2+x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3+x^2+x}\right)}{\left(\sqrt{x^3}-\sqrt{x^3+x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^3}+\sqrt{x^3+x^2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^3+x^2}+\sqrt{x^4+x^3}+\sqrt{x^4+2x^3+2x^2+x}}{x^3-\left(x^3+x^2+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^3+x^2}+\sqrt{x^4+x^3}+\sqrt{x^4+2x^3+2x^2+x}}{-x^2-x}=$$

$$\left(\text{dividimos todo por } x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}}{-1-\frac{1}{x}}=\frac{1+1+1+1}{-1}=-4$$