SISTEMAS DE ECUACIONES

1. Discutir y resolver el sistema según los valores del parámetro a:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+az=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases} ;$$

Solución:

$$Si \;\; a\neq 0 \;\; y \;\; a\neq 1,\; Rang(A)\neq Rang(\bar{A}) \;\Rightarrow\; sistema \;\; incompatible$$

$$Si \;\; a=0,\; Rang(A)=Rang(\bar{A})=2 \;\Rightarrow\; sistema \;\; compatible \;\; indeterminado$$

$$Si \;\; a=1,\; Rang(A)=Rang(\bar{A})=1 \;\Rightarrow\; sistema \;\; compatible \;\; indeterminado$$

$$a=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1 \end{cases} \quad ; \quad a=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=1-\lambda-\mu \end{cases}$$

2. Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro a y resolverlo en los casos de compatibilidad.

$$\begin{cases} 2x+3y+az=0 \\ ay-z=2 \\ ax+ay+az=a \end{cases}$$

Solución:

$$Si \;\; a\neq 0 \;\; y \;\; a\neq 1,\; Rang(A)=Rang(\bar{A})=3 \;\Rightarrow\; sistema \;\; compatible \;\; determinado$$

$$Si \;\; a=0,\; Rang(A)=Rang(\bar{A})=2 \;\Rightarrow\; sistema \;\; compatible \;\; indeterminado$$

$$Si \;\; a=1,\; Rang(A)=2\neq Rang(\bar{A})=3 \;\Rightarrow\; sistema \;\; incompatible$$

$$a\neq 0\,,\; a\neq 1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a^2+2a-9}{(a-1)^2} \\ y=\dfrac{2(a^2-3)}{(a-1)^2} \\ z=\dfrac{2a^2-4a-6}{-a(a-1)^2} \end{cases} \quad ; \quad a=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-2 \end{cases}$$

3. Resolver los sistemas siguientes:

$$a)\ \begin{cases} 3x-y+2z=2 \\ x-y+4z=12 \\ x+y-6z=1 \\ 5x-y=15 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+2y-3z=1 \\ 2x+3y+z+4t=0 \\ y-z+t=3 \\ x-2t=10 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 3x+7y+6z-5t=-8 \\ 2x+3y+4z-t=-2 \\ x-y+2z+3t=4 \\ 3x+2y+6z+2t=2 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 6x-9y=0 \\ -4x+6y=0 \\ 2x-3y=0 \end{cases} \qquad e)\ \begin{cases} 2x+3y+4z=0 \\ -x+10y+3z=0 \\ 4x+5y+7z=0 \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} 3x+y-z+t=0 \\ 7x-y+2z+4t=0 \\ y-2z+t=0 \end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -x+2z=2 \\ 2x+y=-1 \\ -2x+y-2z=0 \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} x+y-z+t=2 \\ 2x-y+z+2t=1 \\ 2x+2y-2z+2t=0 \end{cases} \qquad i)\ \begin{cases} 2x+y-z-t=4 \\ 3x-2y+z+2t=0 \end{cases}$$

Soluciones:

$a)$ *incompatible* $\quad b)\ \left(x=-\frac{128}{5}\ ,\ y=\frac{179}{5}\ ,\ z=15\ ,\ t=-\frac{89}{5}\right)$ $\quad c)\ \left(x=2-2\lambda-\frac{8}{5}\mu\ ,\ y=-2+\frac{7}{5}\mu\ ,\ z=\lambda\ ,\ t=\mu\right)$

$d)\ \left(x=\frac{3}{2}\lambda\ ,\ y=\lambda\right)$ $\quad e)\ (x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0)$ $\quad f)\ \left(x=-\frac{5}{7}\lambda\ ,\ y=\frac{23}{7}\lambda\ ,\ z=\frac{15}{7}\lambda\ ,\ t=\lambda\right)$

$g)$ *incompatible* $\quad h)$ *incompatible* $\quad i)\ \left(x=\frac{8}{7}+\frac{1}{7}\lambda\ ,\ y=\frac{12}{7}+\frac{5}{7}\lambda+\mu\ ,\ z=\lambda\ ,\ t=\mu\right)$

4. Encontrar los valores del parámetro a para que el siguiente sistema tenga soluciones distintas de la trivial.

$$\begin{cases} x-ay-z=0 \\ (2-2a)x+5y+z=0 \\ 4x+y+(5+a)z=0 \end{cases}$$

Solución: $a=-2\ ;\quad a=\dfrac{-2+\sqrt{46}}{2}\ ;\quad a=\dfrac{-2-\sqrt{46}}{2}$

5. Demostrar que el sistema $\begin{cases} -x+by+cz=0 \\ ax-y+cz=0 \\ ax+by-z=0 \end{cases}$ admite solución distinta de la trivial, si se verifica que $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}=2$.

6. Determinar, si existe, el valor del parámetro a para que el siguiente sistema sea compatible indeterminado.

$$\begin{cases} 3x-2y+z=1 \\ x+y-az=2 \\ y-z=-1 \end{cases}$$

Solución:

$$Para\ \ a=\frac{4}{3}\ \ el\ sistema\ es\ incompatible,\ \ para\ \ a\neq\frac{4}{3}\ el\ sistema\ es\ compatible\ determinado.$$

En ningún caso el sistema es compatible indeterminado.

7. Estudiar el sistema según los valores de los parámetros a y b

$$\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$$

Solución:

$Si\ b\neq 0\ ,\ a\neq 1\ \ y\ \ a\neq -2\ ,\ Rang(A)=Rang(\overline{A})=3 \Rightarrow$ *sistema compatible determinado*

$Si\ \ a=1,\ b\neq 1\ ,\ Rang(A)=1\neq Rang(\overline{A})=2\ \Rightarrow$ *sistema incompatible*

$Si\ \ a=1\ ,\ b=1\ ,\ Rang(A)=Rang(\overline{A})=1\ \Rightarrow$ *sistema compatible indeterminado*

$Si\ \ a=-2,\ b\neq -2\ ,\ Rang(A)=2\neq Rang(\overline{A})=3\ \Rightarrow$ *sistema incompatible*

$Si\ \ a=-2\ ,\ b=-2\ ,\ Rang(A)=Rang(\overline{A})=2\ \Rightarrow$ *sistema compatible indeterminado*

$Si\ b=0\ ,\ a\neq 1\ ,\ Rang(A)=2\neq Rang(\overline{A})=3 \Rightarrow$ *sistema incompatible*

$Si\ \ b=0\ ,\ a=1,\ Rang(A)=1\neq Rang(\overline{A})=2\ \Rightarrow$ *sistema incompatible*

8. Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+2z+3t=6 \\ 2x+4y+3z+5t=10 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

Solución:

$$Rang(A)=Rang(\overline{A})=2\ \Rightarrow\ sistema\ compatible\ indeterminado \Rightarrow \begin{cases} x=2-2\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=2-\mu \\ t=\mu \end{cases}$$

9. Discutir y resolver el siguiente sistema, para los distintos valores reales del parámetro k

$$\begin{cases} 2x-ky+z=1 \\ 2x+3y+z=k+3 \\ kx+ky+(k+1)z=-1 \end{cases}$$

Solución:

$Si\ \ k\neq -2\ \ y\ \ k\neq -3,\ Rang(A)=Rang(\overline{A})=3\ \Rightarrow\ sistema\ compatible\ determinado$

$Si\ \ k=-2,\ Rang(A)=Rang(\overline{A})=2\ \Rightarrow\ sistema\ compatible\ indeterminado$

$Si\ \ k=-3,\ Rang(A)=2\neq Rang(\overline{A})=3\ \Rightarrow\ sistema\ incompatible$

$$Para\ k\neq -2\ \ y\ \ k\neq -3\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{k^2+3k+3}{k+3} \\ y=\dfrac{k+2}{k+3} \\ z=\dfrac{-k^2-3k-3}{k+3} \end{cases}\ ;\ \ para\ k=-2\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

10. Discutir el siguiente sistema, para los distintos valores reales del parámetro k

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ x+y+z=k \end{cases}$$

Solución:

$Si\ \ k\neq 1\ \ y\ \ k\neq -3,\ Rang(A)<Rang(\overline{A})=4\ \Rightarrow\ sistema\ incompatible$

$Si\ \ k=1,\ Rang(A)=Rang(\overline{A})=1\ \Rightarrow\ sistema\ compatible\ indeterminado$

$Si\ \ k=-3,\ Rang(A)=Rang(\overline{A})=3\ \Rightarrow\ sistema\ compatible\ determinado$

$$Para\ k=-3\Rightarrow (x=-1\ ,\ \ y=-1\ ,\ \ z=-1)\ ;\quad para\ k=1\ \Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda-\mu \\ y=\lambda \\ z=\mu \end{cases}$$

11. Demostrar que un sistema de n ecuaciones lineales con $(n-1)$ incógnitas es incompatible si $|\overline{A}|\neq 0$

12. Comprobar que si $(s_1\, ,\ s_2\, ,\ s_3\, ,\ \ldots\ldots\ ,\ s_n)$ es solución de un sistema homogéneo, entonces también lo es $(\lambda s_1+\mu s_1\, ,\ \lambda s_2+\mu s_2\, ,\ \lambda s_3+\mu s_3\, ,\ \ldots\ldots\ ,\ \lambda s_n+\mu s_n)\ ,\ \ \forall\, \lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$.

13. Discutir el sistema para los distintos valores de los parámetros m y n

$$\begin{cases} x+my+m^2z=1 \\ x+my+mnz=m \\ nx+m^2y+m^2nz=m^2n \end{cases}$$

Solución:

$Si\ m\neq 0\ \ y\ \ m\neq n\ ,\ Rang(A)=Rang(\bar{A})=3 \Rightarrow\ sistema\ compatible\ determinado$

$Si\ \ m=0\ ,\ Rang(A)=1\neq Rang(\bar{A})=2\ \Rightarrow\ sistema\ incompatible$

$Si\ \ m=n=1\ ,\ Rang(A)=Rang(\bar{A})=1\ \Rightarrow\ sistema\ compatible\ indeterminado$

$Si\ \ m=n\ ,\ \ m\neq 1\ ,\ Rang(A)=1\neq Rang(\bar{A})=2\ \Rightarrow\ sistema\ incompatible$

14. Estudiar y resolver, en su caso, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \begin{cases} x-y+z+t=2 \\ x+y-z+t=-8 \\ x+y+z-t=6 \\ -x+y+z+t=-4 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x-3y+z-t=1 \\ x+z+t=0 \\ x+6y+3z+7t=-2 \\ x-3y-2t=1 \\ 3y+z+3t=-1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x+y+2z-t=4 \\ x-y+z+2t=3 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

15. Estudiar y resolver, según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \begin{cases} ax+y+z=2 \\ 3x-z=-2 \\ -x+z=4 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ x+ay-2z=-20 \\ 3x-5y+z=-3 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} (a-1)^2x+(a^2-1)y=(a+1)^2 \\ (2a-1)x-(a+1)y=a^2-1 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} ax+y+z=a^2 \\ x-y+z=1 \\ 3x-y-z=1 \\ 6x-y+z=3a \end{cases}$$

$e)\quad \begin{cases} ax+2z=0 \\ ay-z=a \\ x+3y+z=54 \end{cases}$

$f)\quad \begin{cases} ax+y+z=0 \\ x+ay=0 \\ 3x+az=0 \end{cases}$

$g)\quad \begin{cases} x-2y+4z=a \\ 3x+4y-z=0 \\ ax-y+2z=0 \end{cases}$

$h)\quad \begin{cases} x-y=2 \\ (a+2)x+(a+3)y=6 \\ (3a+1)x+3ay=4 \\ 6x-y+z=3a \end{cases}$

$i)\quad \begin{cases} -7x-7y+2z=13 \\ x-5y-2z=-9 \\ 4x+y-2z=a \end{cases}$

$j)\quad \begin{cases} ax+ay+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

$k)\quad \begin{cases} (2a+2)x+ay+2z=2a-2 \\ 2x+(2-a)y=0 \\ (a+1)x+(a+1)z=a-2 \end{cases}$

$l)\quad \begin{cases} x+y-z=2 \\ ax+y+z=1 \\ x-y+3z=-3 \\ 4x+2y=a \end{cases}$

16. Discutir y resolver, según los valores de los parámetros, los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$a)\quad \begin{cases} ax+(2a-b)y=a+b-3 \\ 5x+4y=1 \end{cases}$

$b)\quad \begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+y+2z=3 \\ x+3y+az=1 \\ x+2y+z=b \end{cases}$

$c)\quad \begin{cases} mx+y=n \\ x+my=n \\ x+y=1 \end{cases}$

$d)\quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+y+z=1 \\ x+ay+bz=1 \end{cases}$

$e)\quad \begin{cases} ax+y+z=a \\ x+ay-z=1 \\ 3x+bz+y=2 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

$f)\quad \begin{cases} x-2y-z=3a+3b \\ x-y=1+2a+2b \\ bx+ay=b^2-a^2-6 \\ ax+by=a^2-b^2+6 \end{cases}$