7 Resuelve los siguientes sistemas aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases}8x + 14y = 2\\ 3x - \ \ 5y = 11\end{cases}$

b) $\begin{cases}x + y - z + t = 1\\ x - y \qquad - t = 2\\ \qquad\qquad z - t = 0\end{cases}$

c) $\begin{cases}3x - \ \ y \qquad\ \ = 2\\ 2x + \ \ y + \ \ z = 0\\ \qquad 3y + 2z = -1\end{cases}$

d) $\begin{cases}x - y - z + t = 4\\ x + y + z - t = 2\end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l}8x + 14y = 2\\ 3x - \ \ 5y = 11\end{array}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}8 & 14\\ 3 & -5\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\ 11\end{matrix}\end{array}\right) \rightarrow |A| = -82 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}2 & 14\\ 11 & -5\end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2;\quad y = \frac{\begin{vmatrix}8 & 2\\ 3 & 11\end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solución: $x = 2,\ y = -1$

b) $$\left.\begin{array}{r}x + y - z + t = 1\\ x - y \qquad - t = 2\\ z - t = 0\end{array}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{array}}_{A} & \begin{matrix}1\\ 2\\ 0\end{matrix}\end{array}\right) \rightarrow \text{Tenemos que } \begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}1-t & 1 & -1\\ 2+t & -1 & 0\\ t & 0 & 1\end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2};\quad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1-t & -1\\ 1 & 2+t & 0\\ 0 & t & 1\end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1-t\\ 1 & -1 & 2+t\\ 0 & 0 & t\end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t$$

Soluciones: $x = \dfrac{3+\lambda}{2},\ y = \dfrac{-1-\lambda}{2},\ z = \lambda,\ t = \lambda$

c) $$\left.\begin{array}{r}3x - \ \ y \qquad\ \ = 2\\ 2x + \ \ y + \ \ z = 0\\ 3y + 2z = -1\end{array}\right\}\ A' = \left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\ 0\\ -1\end{matrix}\end{array}\right) \rightarrow |A| = 1 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1;\quad y = \frac{\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;\quad z = \frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1,\ y = -5,\ z = 7$

d) $$\left.\begin{array}{l}x - y - z + t = 4\\ x + y + z - t = 2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x - y = 4 + z - t\\ x + y = 2 - z + t\end{array}\right\}\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}4 + z - t & -1\\ 2 - z + t & 1\end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3;\quad y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 4 + z - t\\ 1 & 2 - z + t\end{vmatrix}}{2} = \frac{-2 - 2z + 2t}{2} = -1 - z + t$$

Soluciones: $x = 3,\ y = -1 - \lambda + \mu,\ z = \lambda,\ t = \mu$

8 Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{aligned} 3x + y - z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 = n.^o$ *de incógnitas*.

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \dfrac{-1}{3},\ y = \dfrac{2}{3},\ z = \dfrac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= -2 \\ -2x + y + z &= -2 \\ x + y - 2z &= -2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ y $|A| = 0$, tenemos que $ran\,(A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$. Luego $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -x - y &= 1 \\ -y - z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

Como $|A| = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos que:

$ran\,(A) = ran\,(A') = 2 < n.^o$ *de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para hallar sus soluciones, podemos prescindir de la 1.ª ecuación y resolverlo en función de y:

$$\left.\begin{aligned} -x - y &= 1 \\ -y - z &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= -1 - y \\ z &= 1 - y \end{aligned}\right\}$$

Soluciones: $x = -1 - \lambda,\ y = \lambda,\ z = 1 - \lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x+z=6 \\ y+z=7 \\ 2x+y+z=11 \end{array}\right\} \quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 11 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

Tenemos que $|A'| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Luego $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solución: $x = 2,\ y = 3,\ z = 4$

9 Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

a) $$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x+\ \ y-\ \ z=0} \\ \boldsymbol{12x-3y-2z=0} \\ \boldsymbol{x-2y+\ \ z=0} \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{9x+3y+2z=0} \\ \boldsymbol{3x-\ \ y+\ \ z=0} \\ \boldsymbol{8x+\ \ y+4z=0} \\ \boldsymbol{x+2y-2z=0} \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y-\ \ z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \\ x-2y+\ \ z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+\ \ y-\ \ z=0 \\ x-2y+\ \ z=0 \\ 12x-3y-2z=0 \end{array}\right\} \quad A=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \hline 12 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $ran(A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x+\ \ y=z \\ x-2y=-z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & z-2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $x = \dfrac{\lambda}{3},\ y = \dfrac{2\lambda}{3},\ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} 9x+3y+2z=0 \\ 3x-\ \ y+\ \ z=0 \\ 8x+\ \ y+4z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{array}\right\} \quad A=\begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces $ran(A) = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

Discusión de sistemas mediante determinantes

10 **¿Existe algún valor de a para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?:**

a) $\begin{cases} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=-4 \\ x+y+2z=2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$, con $\underbrace{}_{A}$ bajo las tres primeras columnas

$$|A| = 9a + 27 = 0 \rightarrow a = -3$$

- Si $a = -3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

El sistema es *incompatible*.

- Si $a = -3 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, *no* existe ningún valor de a para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$, con $\underbrace{}_{A}$ bajo las tres primeras columnas

$$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

La 1.ª y la 3.ª ecuación son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

- Si $a = 2$, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;

luego, $ran(A) = ran(A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

Página 115

11 Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \ \rightarrow \ a = -5$

- Si $a = -5 \ \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -5 \ \rightarrow$ Solo tiene la solución trivial $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$.

b) $$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -3$ o $a = 2 \ \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -3$ y $a \neq 2 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$.

c) $$\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -2a - 5 = 0 \ \rightarrow \ a = \dfrac{-5}{2}$

- Si $a = -\dfrac{5}{2} \ \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$.

d) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ |A| = 3a - 46 = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{46}{3}$$

- Si $a = \dfrac{46}{3} \ \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq \dfrac{46}{3} \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 3$. Solo existe la solución trivial $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$.