Recuperación 2ª evaluación. 16 de abril de 2007

Opción A

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=cx^3$, siendo $c>0$, se cortan en los puntos $(0,0)$ y en $\left(\frac{1}{c},\frac{1}{c^2}\right)$. Determinar c de manera que la región limitada entre esas gráficas y sobre el intervalo $\left[0,\frac{1}{c}\right]$ tenga área $\frac{2}{3}$.

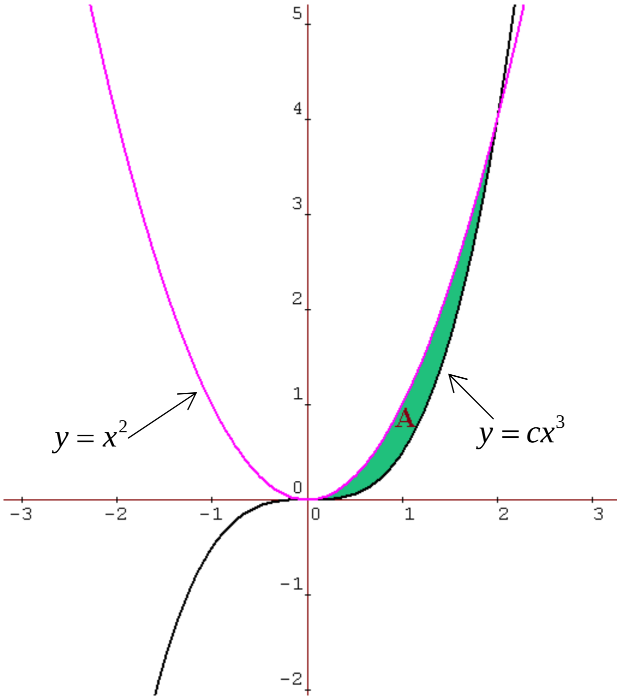
Solución:

$$A=\frac{2}{3}$$

$$A=\int_0^{1/c}x^2dx-\int_0^{1/c}cx^3dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{1/c}-\left[\frac{cx^4}{4}\right]_0^{1/c}=$$

$$=\frac{1}{3c^3}-\frac{c}{4c^4}=\frac{1}{3c^3}-\frac{1}{4c^3}=\frac{1}{12c^3}$$

$$\frac{1}{12c^3}=\frac{2}{3}\Rightarrow c^3=\frac{1}{8}\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$



Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int\frac{5x+4}{x^2-4x+13}dx$ b) $\int x\cdot 7^{x^2}dx$

Solución:

$$\int\frac{5x+4}{x^2-4x+13}dx=5\int\frac{x}{x^2-4x+13}dx+4\int\frac{1}{x^2-4x+13}dx=5\int\frac{x-2+2}{x^2-4x+13}dx+4\int\frac{1}{x^2-4x+13}dx=5\int\frac{x-2}{x^2-4x+4+9}dx+14\int\frac{1}{x^2-4x+13}dx=$$

$$\frac{5}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+13}dx+14\int\frac{1}{x^2-4x+4+9}dx=\frac{5}{2}\ln\left(x^2-4x+13\right)+14\int\frac{dx}{9+(x-2)^2}=\frac{5}{2}\ln\left(x^2-4x+13\right)+\frac{14}{9}\int\frac{dx}{1+\frac{(x-2)^2}{9}}=$$

$$\frac{5}{2}\ln\left(x^2-4x+13\right)+\frac{14}{3}\int\frac{1/3}{1+\left(\frac{x-2}{3}\right)^2}dx=\frac{5}{2}\ln\left(x^2-4x+13\right)+\frac{14}{3}arctg\frac{x-2}{3}+C$$

$$\int x\cdot 7^{x^2}dx=\frac{1}{2\ln 7}\int(2x\ln 7)\cdot 7^{x^2}dx=\frac{1}{2\ln 7}\cdot 7^{x^2}+C \qquad \textit{puesto que si } y=7^{x^2}\Rightarrow y'=7^{x^2}\cdot 2x\ln 7$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Esbozar la gráfica de $f(x)=\left(x^2-x\right)e^x$ y calcular el área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y el eje OX.

Solución:

$f(x)=\left(x^2-x\right)e^x$

$Domf=\mathbb{R}$

Cortes con los ejes $\Rightarrow OX:(0,0)\ y\ (1,0)\ ;\ OY:(0,0)$

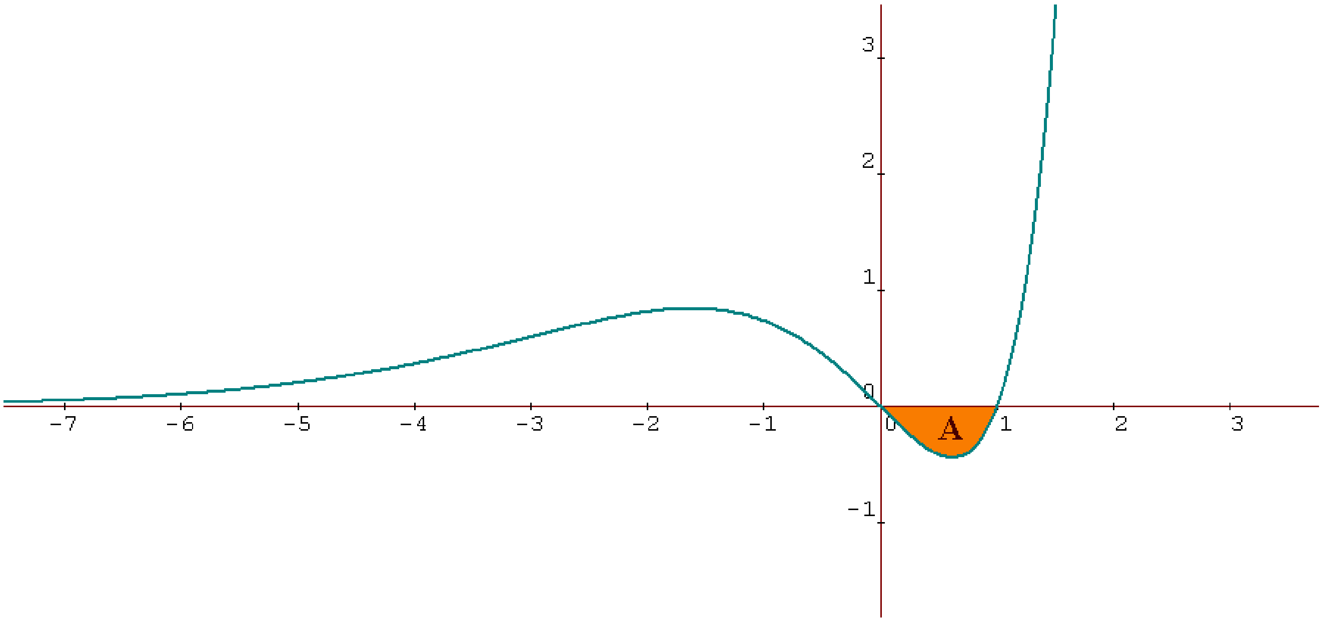
No es simétrica.

$y=0$ es asíntota horizontal cuando $x\to-\infty$

$y'=\left(x^2+x-1\right)e^x\ ;\quad y''=\left(x^2+3x\right)e^x$

En $x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ hay un máximo, en $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ hay un mínimo, en $x=0$ y en $x=-3$ hay puntos de inflexión.

$f(x)$ es creciente en $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$. $f(x)$ es decreciente en $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$



$A=-\int_0^1\left(x^2-x\right)e^x dx=-\left[\left(x^2-3x+3\right)e^x\right]_0^1=-[e-3]=e-3$

$\int\left(x^2-x\right)e^x dx=\left(x^2-x\right)e^x-\int(2x-1)e^x dx=\left(x^2-x\right)e^x-\left[(2x-1)e^x-\int 2e^x dx\right]=\left(x^2-x\right)e^x-(2x-1)e^x+2e^x=\left(x^2-3x+3\right)e^x$

$\left\{\begin{array}{l}u=x^2-x,\ du=(2x-1)dx\\ dv=e^x dx,\ v=e^x\end{array}\right\},\left\{\begin{array}{l}u=2x-1,\ du=2dx\\ dv=e^x dx,\ v=e^x\end{array}\right\}$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcular los puntos donde se anula la derivada de la función $f(x)=-2x+\int_0^{2x}e^{\left(t^2-10t+24\right)}dt$.

Solución:

Aplicando el teorema fundamental del cálculo integral obtenemos:

$f'(x)=-2+2e^{(4x^2-20x+24)}\Rightarrow-2+2e^{(4x^2-20x+24)}=0\Rightarrow e^{(4x^2-20x+24)}=1\Rightarrow 4x^2-20x+24=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=2\\ x=3\end{array}\right.$

Opción B

Ejercicio 1. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Calcula el valor de la integral $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Solución:

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \left(1+x^2\right)^{1/2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\left[\sqrt{4^3}-1\right] = \frac{7}{3}$$

$$\int \left[f(x)\right]^n\cdot f'(x)\,dx = \frac{\left[f(x)\right]^{n+1}}{n+1}+C$$

Ejercicio 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Esbozar la gráfica de $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ y calcular el área de la región limitada por la curva $y=f(x)$, el eje OX y las rectas $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=\dfrac{1}{2}$.

Solución:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

Domf $=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$

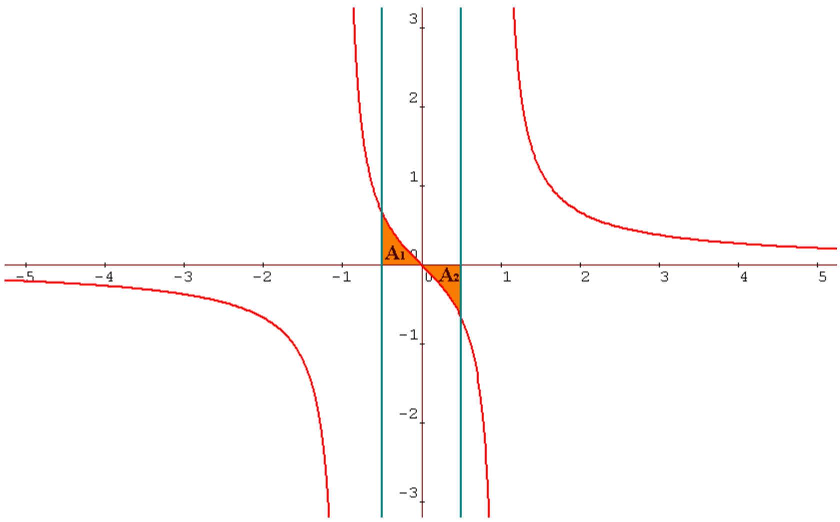
Cortes con los ejes. OX, OY en $(0,0)$

$f(x)$ *es simétrica con respecto al origen de coordenadas, función impar.*

Asíntotas verticales: $x=-1$, $x=1$. *Asíntota horizontal* $x=0$

$$y'=\frac{-1-x^2}{\left(x^2-1\right)^2} \quad , \quad y''=\frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3}$$

No hay máximos ni mínimos. En $x=0$ *hay un punto de inflexión. La función es siempre decreciente.*



$$A_1=A_2 \Rightarrow A=2A_1$$

$$A=2\int_{-1/2}^{0}\frac{x}{x^2-1}\,dx=\int_{-1/2}^{0}\frac{2x}{x^2-1}\,dx=\left[\ln\left|x^2-1\right|\right]_{-1/2}^{0}=0-\ln\frac{3}{4}=-\left(\ln 3-\ln 4\right)=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Calcula las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (\ln x)^2\, dx$ b) $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x}\, dx$

Solución:

$$\int (\ln x)^2\, dx = x\cdot(\ln x)^2 - \int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx = x\cdot(\ln x)^2 - 2\int \ln x\cdot dx = x\cdot(\ln x)^2 - 2\left[x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\right] = x\cdot(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

$$\uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\left\{\begin{matrix} u=(\ln x)^2,\ du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = dx\ ,\ v = x\end{matrix}\right\} \qquad \left\{\begin{matrix} u=\ln x\ ,\ du = \frac{1}{x}\cdot dx \\ dv = dx\ ,\ v = x\end{matrix}\right\}$$

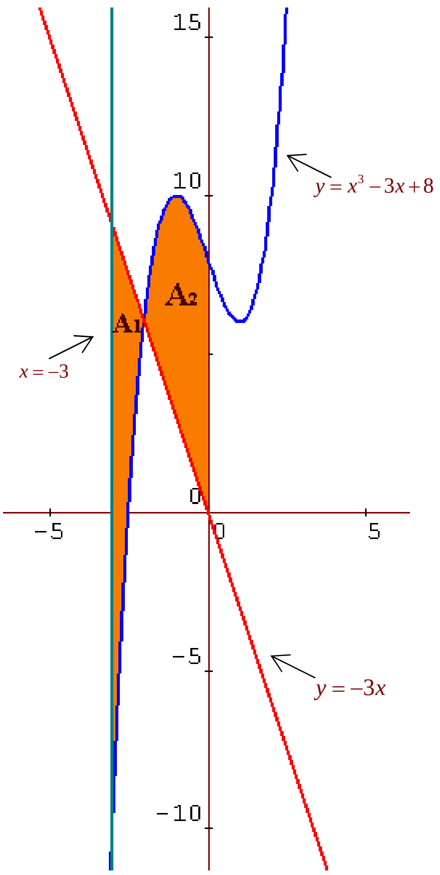
$$\int \frac{senx}{sen^2 x + 2\cos^2 x}dx = \int \frac{senx}{1-\cos^2 x + 2\cos^2 x}dx = \int \frac{senx}{1+\cos^2 x}dx = -\int \frac{1}{1+t^2}dt = -arctgt = -arctg(\cos x) + C$$

$$\uparrow$$

$$\cos x = t \Rightarrow -senx\cdot dx = dt \Rightarrow senx\cdot dx = -dt$$

Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Calcular el área del recinto limitado por las curvas $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$, y las verticales $x = -3$, $x = 0$.

Solución:



Las curvas $y = x^3 - 3x + 8$, $y = -3x$ *se cortan en* $x = -2$

$$A = A_1 + A_2$$

$$A = \int_{-3}^{-2}\left(-3x - x^3 + 3x - 8\right)dx + \int_{-2}^{0}\left(x^3 - 3x + 8 + 3x\right)dx =$$

$$= \int_{-3}^{-2}\left(-x^3 - 8\right)dx + \int_{-2}^{0}\left(x^3 + 8\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4} - 8x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{0} =$$

$$\left[-4 + 16 - \left(-\frac{81}{4} + 24\right)\right] + \left[0 - (4 - 16)\right] = \frac{81}{4}$$