18 **Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}(1, 2, 3)$, $\vec{v}(-2, 1, 0)$ y $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Justifica por qué el resultado es $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$.**

- $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 2, 3) \times (-2, 1, 0) = (-3, -6, 5)$

  $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 70 \rightarrow \text{Volumen} = 70 \text{ u}^3$$

- $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$

  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = |(\vec{u} \times \vec{v})|^2$

19 **Calcula el volumen del tetraedro determinado por los vectores siguientes:**

$$\vec{a}(3, -1, 1), \quad \vec{b}(1, 7, 2), \quad \vec{c}(2, 1, -4)$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -111 \rightarrow \text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot 111 = 18{,}5 \text{ u}^3$$

20 **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(1, m, 3)$ y $\vec{w}(-4, 5, -1)$ sean coplanarios.**

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2m + 8 = 0 \rightarrow m = -4$$

Página 142

Para resolver

21 **Considera los siguientes vectores:**

$$\vec{u}(1, -1, 3), \quad \vec{v}(1, 0, -1), \quad \vec{w}(m, 1, 0)$$

a) Calcula el valor de m para el cual $\vec{u}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

b) Halla los valores de m que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) Para $m = 1$ escribe el vector $\vec{s}(3, 0, 2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (1, -1, 3) \cdot (m, 1, 0) = m - 1 \rightarrow m - 1 = 0 \rightarrow m = 1$

Son ortogonales cuando $m = 1$.

b) Los vectores son linealmente independientes si el rango de la matriz que forman es 3, es decir, si el determinante de la matriz que forman no vale 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ m & 1 & 0 \end{vmatrix} = m + 4$$

Son linealmente independientes si $m \neq -4$

c) $(3, 0, 2) = x(1, -1, 3) + y(1, 0, -1) + z(1, 1, 0)$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ -x + \quad z = 0 \\ 3x - y \quad = 2 \end{array}\right\} \rightarrow x = 1, \; y = 1, \; z = 1$$

$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

22 **Prueba que los vectores (1, *a*, *b*), (0, 1, *c*), (0, 0, 1) son linealmente independientes cualesquiera que sean *a*, *b* y *c*.**

$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ para cualquier valor de a, b, c.

Por tanto, son linealmente independientes.

23 **Dados los vectores $\vec{a}(1, 2, -1)$ y $\vec{b}(1, 3, 0)$, comprueba que el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a $\vec{a} + \vec{b}$ y a $\vec{a} - \vec{b}$.**

$\vec{a}(1, 2, -1)$

$\vec{b}(1, 3, 0)$

$\vec{a} + \vec{b} = (2, 5, -1)$

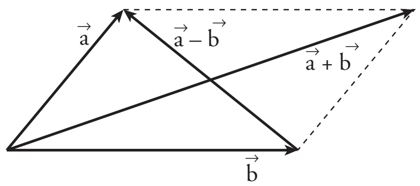
$\vec{a} - \vec{b} = (0, -1, -1)$

$\vec{a} \times \vec{b} = (3, -1, 1)$

$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (2, 5, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$.

$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (0, -1, -1) \cdot (3, -1, 1) = 0$. Por tanto, $\vec{a} - \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$.

Hasta aquí, la comprobación rutinaria, numérica. Más interesante es la siguiente reflexión:



Los vectores $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ son las diagonales del paralelogramo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por tanto, están en el plano definido por $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Y el vector $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a dicho plano.

Así, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares a $\vec{a} \times \vec{b}$.

24 **a) Comprueba que el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}(3, -2, 1)$ y $\vec{v}(4, 3, -6)$ es un rectángulo.**

b) Halla su área multiplicando la base por la altura y comprueba que obtienes el mismo resultado si hallas $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 3, -6) = 12 - 6 - 6 = 0$. Luego $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, y el paralelogramo es un rectángulo.

b) $\left.\begin{array}{l} \text{Base} = |\vec{u}| = \sqrt{14} \\ \text{Altura} = |\vec{v}| = \sqrt{61} \end{array}\right\}$ Área $= \sqrt{854} \approx 29,22 \ u^2$

Por otra parte:

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(9, 22, 17)| = \sqrt{854} \approx 29,22 \ u^2$

25 **Dado el vector $\vec{v}(-2, 2, -4)$, halla las coordenadas de los siguientes vectores:**

a) Unitario y perpendicular a $\vec{v}$.

b) Paralelos a $\vec{v}$ y de módulo 6.

a) $\vec{u}(x, y, z)$ ha de cumplir $-2x + 2y - 4z = 0$ y ser unitario.

Por ejemplo, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

b) $(-\sqrt{6}, \sqrt{6}, -2\sqrt{6})$ y $(\sqrt{6}, -\sqrt{6}, 2\sqrt{6})$

26 **Halla un vector ortogonal a $\vec{u}(2, 3, -1)$ y a $\vec{v}(1, 4, 2)$ cuya tercera componente sea 1.**

$\vec{u} \times \vec{v} = (10, -5, 5) \,//\, (2, -1, 1)$

El vector que buscamos es $(2, -1, 1)$.

27 **Dados los siguientes vectores: $\vec{u}_1(2, 0, 0)$, $\vec{u}_2(0, 1, -3)$, $\vec{u}_3 = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$, ¿qué relación deben cumplir a y b para que $\vec{u}_3$ sea ortogonal al vector $\vec{v}(1, 1, 1)$?**

$\vec{u}_3 = a(2, 0, 0) + b(0, 1, -3) = (2a, b, -3b)$

Para que $\vec{u}_3$ sea perpendicular a $\vec{v}$ ha de ser:

$\vec{u}_3 \cdot \vec{v} = (2a, b, -3b) \cdot (1, 1, 1) = 2a + b - 3b = 2a - 2b = 0$, es decir, $a = b$.

28 **Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ que sea ortogonal a $\vec{v}(1, 2, 3)$ y $\vec{w}(1, -1, 1)$ y tal que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 19$.**

$\vec{v} \times \vec{w} = (5, 2, -3)$

Un vector ortogonal a $\vec{v}$ y a $\vec{w}$ es de la forma $(5k, 2k, -3k)$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 5k & 2k & -3k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 38 = 19 \;\rightarrow\; k = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\vec{u}\left(\frac{5}{2}, 1, \frac{-3}{2}\right)$

29 **a) Determina los valores de a para los que resultan linealmente dependientes los vectores $(-2, a, a)$, $(a, -2, a)$ y $(a, a, -2)$.**

b) Obtén en esos casos una relación de dependencia entre los vectores.

a) $$\begin{vmatrix} -2 & a & a \\ a & -2 & a \\ a & a & -2 \end{vmatrix} = 2a^3 + 6a^2 - 8 = 2(a-1)(a+2)^2 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

Para $a = 1$ y para $a = -2$, los tres vectores dados son linealmente dependientes.

b) Para $a = 1$, queda: $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$, $(1, 1, -2)$ y tenemos que:

$-1 \cdot (-2, 1, 1) - 1 \cdot (1, -2, 1) = (1, 1, -2)$

Para $a = -2$, queda: $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$, $(-2, -2, -2)$ y tenemos que:

$1 \cdot (-2, -2, -2) + 0 \cdot (-2, -2, -2) = (-2, -2, -2)$

30 **Dados los siguientes vectores:**

$$\vec{u}(1, 0, -1), \quad \vec{v}(0, a+1, 0), \quad \vec{w}(1, 1, a-1)$$

a) Halla los valores de a para los que los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.

b) Estudia si el vector $\vec{c}(1, 2, 3)$ depende linealmente de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ para el caso $a = 2$.

c) Justifica razonadamente si para $a = 1$ se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$.

a) $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0+1 & 0 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = a(a+1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

b) Para $a = 2$, los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes. Como son tres vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes, forman una base de $\mathbb{R}^3$.

Así, cualquier otro vector, y, en particular $\vec{c}(1, 2, 3)$, depende linealmente de ellos.

Obtenemos la combinación lineal:

Para $a = 2$, tenemos que: $\vec{u}(1, 0, -1)$, $\vec{v}(0, 3, 0)$, $\vec{w}(1, 1, 1)$.

$(1, 2, 3) = x(1, 0, -1) + y(0, 3, 0) + z(1, 1, 1)$

$$\left.\begin{array}{r} x + \quad\quad z = 1 \\ 3y + z = 2 \\ -x + \quad\quad z = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-6}{6} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{0}{6} = 0; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

Por tanto:

$\vec{c} = -\vec{u} + 2\vec{w}$

c) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ para $a = 1$. Está probado en el apartado a).

31 Dados los siguientes vectores $\vec{u}(1, -1, 0)$, $\vec{v}(0, 1, 2)$ y $\vec{w}(k + 1, 2k, 2 - 3k)$, halla los valores de k…

a) para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean coplanarios.

b) para que $\vec{w}$ sea perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

c) para que el volumen del tetraedro que tiene por aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sea igual a 1/6.

a) Si los vectores son coplanarios, entonces son linealmente dependientes, es decir, el rango de la matriz que forman es < 3, luego el determinante de la matriz vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ k+1 & 2k & 2-3k \end{vmatrix} = -9k = 0 \rightarrow k = 0$$

b) $\vec{w}$ tiene que ser proporcional al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$(1, -1, 0) \times (0, 1, 2) = (-2, -2, 1)$

$$\frac{k+1}{-2} = \frac{2k}{-2} = \frac{2-3k}{1}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2k = -4 + 6k \\ k + 1 = 2k \end{array}\right\} \rightarrow k = 1$$

c) El volumen del tetraedro es:

$$\left|\frac{1}{6}[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ k+1 & 2k & 2-3k \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6} \rightarrow \frac{9}{6}k = \frac{1}{6} \rightarrow k = \frac{1}{9}$$

32 **a) Halla el número de vectores linealmente independientes que hay en este conjunto:**

$$S = \{(1, 1, 1), (0, 2, 1), (2, 0, -3), (-1, 1, 2)\}$$

b) Un vector no nulo tiene sus tres componentes iguales. ¿Puede escribirse como combinación lineal de los dos primeros vectores de S?

c) Determina un vector que, teniendo sus dos primeras componentes iguales a 1, se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S.

a) Tenemos que hallar el rango de la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Como } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \; ran(M) = 3.$$

Por tanto, hay tres vectores linealmente independientes en S.

b) Sí. Si tiene sus tres componentes iguales y es no nulo, es de la forma: $\vec{u} = (k, k, k)$ con $k \neq 0$. Entonces, podemos obtenerlo a partir de los dos primeros vectores de S como sigue:

$\vec{u} = k \cdot (1, 1, 1) + 0 \cdot (0, 2, 1)$

c) Sea $\vec{v}(1, 1, x)$ el vector que buscamos. Para que se pueda poner como combinación lineal de los vectores segundo y tercero de S, tenemos que:

$(1, 1, x) = a(0, 2, 1) + b(2, 0, -3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2b = 1 \\ 2a = 1 \\ a - 3b = x \end{array}\right\} \text{ Debe tener solución: } b = \frac{1}{2}, \; a = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = x \;\rightarrow\; x = \frac{-2}{2} = -1 \;\rightarrow\; x = -1$$

Por tanto, el vector es $\vec{v}(1, 1, -1)$.

33 **Halla un vector $\vec{u}$ de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$ y tal que determine con el vector $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u².**

Si $\vec{u}$ es de la misma dirección que $\vec{v}(1, -2, 3)$, será de la forma $\vec{u}(x, -2x, 3x)$, con $x \neq 0$.

Para que forme con $\vec{w}(-2, 4, -1)$ un paralelogramo de área 25 u², ha de ser:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |(-10x, -5x, 0)| = \sqrt{100x^2 + 25x^2} = |x|\sqrt{125} = 25$$

Es decir: $125x^2 = 625 \;\rightarrow\; x^2 = 5 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{5}$

Por tanto, hay dos soluciones: $(\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$.

34 **Halla un vector $\vec{v}$ coplanario con $\vec{a}(2, -1, 1)$ y $\vec{b}(1, 0, 3)$ y ortogonal a $\vec{c}(2, 3, 0)$.**

Sea $\vec{v}(x, y, z)$ tal que:

1.º) es coplanario con $\vec{a}$ y $\vec{b}$, es decir: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3x - 5y + z = 0$

2.º) es ortogonal a $\vec{c}$, es decir: $(x, y, z) \cdot (2, 3, 0) = 2x + 3y = 0$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} -3x - 5y + z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -3x + z = 5y \\ 2x = -3y \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 5y + 3x = 5y - \frac{9}{2}y = \frac{1}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}y \end{array}$$

Soluciones: $(-3\lambda, 2\lambda, \lambda)$ $(\lambda \neq 0)$

Todos los vectores de esta forma cumplen las condiciones. Por ejemplo, para $\lambda = 1$, tenemos el vector $(-3, 2, 1)$.

35 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 4$ y $|\vec{b}| = 2$, con $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 16 + 4 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 60° =$

$= 16 + 4 + 8 = 28 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Por otra parte:

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} =$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 16 + 4 - 8 = 12 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

36 **De dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que son ortogonales y que $|\vec{u}| = 6$ y $|\vec{v}| = 10$. Halla $|\vec{u} + \vec{v}|$ y $|\vec{u} - \vec{v}|$.**

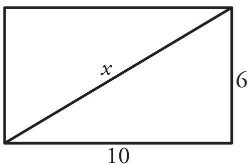
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Así:

$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 0 = 36 + 100 = 136 \rightarrow |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66$

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 136 \rightarrow |\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{136} \approx 11,66$

Observación: Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces forman los lados de un rectángulo con base y altura $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$. En este caso, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son sus diagonales, que tienen el mismo módulo (por tratarse de un rectángulo). Además, para hallar la longitud de la diagonal, podemos aplicar en este caso el teorema de Pitágoras:



$x^2 = 10^2 + 6^2 \rightarrow x^2 = 136 \rightarrow x = \sqrt{136} \approx 11,6$

37 **De los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sabemos que cumplen $\vec{u} + \vec{v} = \vec{a}$, $2\vec{u} - 3\vec{v} = \vec{b}$, siendo $\vec{a}(2, -1, 0)$ y $\vec{b}(1, 3, -1)$. Halla el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

$$\left.\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} &= \vec{b} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 3\vec{u} + 3\vec{v} &= 3\vec{a} \\ 2\vec{u} - 3\vec{v} &= \vec{b} \\ \hline 5\vec{u} \qquad &= 3\vec{a} + \vec{b} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2\vec{u} + 2\vec{v} &= 2\vec{a} \\ -2\vec{u} + 3\vec{v} &= -\vec{b} \\ \hline 5\vec{v} &= 2\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ coincide con el ángulo formado por $\vec{u'} = 5\vec{u}$ y $\vec{v'} = 5\vec{v}$:

$\vec{u'} = (7, 0, -1)$; $\vec{v'} = (3, -5, 1)$

$\vec{u'} \cdot \vec{v'} = 20$

$|\vec{u'}| = \sqrt{50}$; $|\vec{v'}| = \sqrt{35}$

$$\cos(\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = \frac{\vec{u'} \cdot \vec{v'}}{|\vec{u'}||\vec{v'}|} = \frac{20}{\sqrt{50}\sqrt{35}} = 0,4781$$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u'}, \vec{v'}}) = 61° \, 26' \, 21''$

38 **Los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ cumplen las siguientes condiciones:**

$$|\vec{u}| = 5, \quad |\vec{v}| = 4, \quad |\vec{w}| = 7, \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Calcula $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Desarrollando el producto escalar indicado:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 2(\vec{u} \cdot \vec{w}) + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$$

Por otra parte:

$$(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

Así:

$$52 + 42 + 72 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = -\frac{90}{2} = -45$$

Cuestiones teóricas

39 **Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, ¿podemos asegurar que $\vec{v} = \vec{w}$?**

No. Por ejemplo, si $\vec{u}(3, -2, 0)$, $\vec{v}(5, 1, 0)$ y $\vec{w}(7, 4, 0)$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 15 - 2 = 13 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 21 - 8 = 13 \end{array}\right\} \ \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Sin embargo, $\vec{v} \neq \vec{w}$

40 **Prueba, utilizando el producto escalar, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$ entonces $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.**

$\vec{a} \perp \vec{b} \ \rightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{a} \perp \vec{c} \ \rightarrow \ \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Para demostrar que $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, tenemos que probar que su producto escalar es cero:

$$\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m\vec{a} \cdot \vec{b} + n\vec{a} \cdot \vec{c} = m \cdot 0 + n \cdot 0 = 0$$

Por tanto, $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$.

41 **a) ¿Puede haber dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 2$?**

b) Si dos vectores verifican $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|$, ¿qué puedes decir del ángulo que forman?

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 1 \cdot 2 \cdot \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 2\cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -3 \ \rightarrow \ \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\frac{3}{2} > 1$ Imposible.

Luego no existen dos vectores que cumplan estas condiciones.

b) Si $|\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u} \cdot \vec{v}| \ \rightarrow \ |\vec{u}|\,|\vec{v}| = \begin{cases} +|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \\ -|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \end{cases} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \ \rightarrow \ \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 1 \ \rightarrow \ \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 0° \\ |\vec{u}|\,|\vec{v}| = -|\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \ \rightarrow \ \cos \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -1 \ \rightarrow \ \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 180° \end{cases}$$

Por tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.