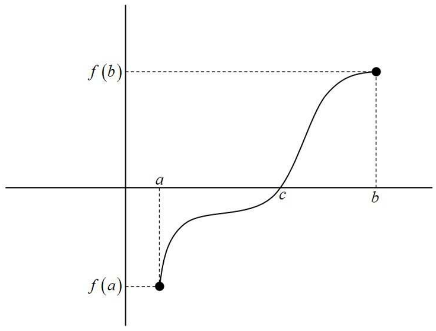
CONTINUIDAD DE FUNCIONES. TEOREMAS FUNDAMENTALES.

Cuando una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y en un extremo es positiva y en otro negativa, la intuición indica que, en algún punto intermedio c, $a<c<b$, su valor debe ser cero; es decir, su gráfica deberá cortar al eje de abscisas en algún punto entre a y b.

La situación queda aún más clara si la expresamos gráficamente:



Teorema de Bolzano:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y tal que el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, es decir $f(a)\cdot f(b)<0$, entonces existe, al menos, un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

La demostración de este teorema no es tan evidente como su justificación intuitiva y para llevarla a cabo nos apoyaremos en un axioma de los números reales y en una propiedad de las funciones continuas:

Axioma de Cantor: Sea $I_1=[a_1,b_1]$, $I_2=[a_2,b_2]$, $I_3=[a_3,b_3]$, …… una sucesión de intervalos cerrados encajados cada uno en el anterior, es decir, $I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$ tales que la sucesión de sus longitudes b_n-a_n tiende a cero. Entonces, existe un único punto, c, común a todos ellos, es decir, $c=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

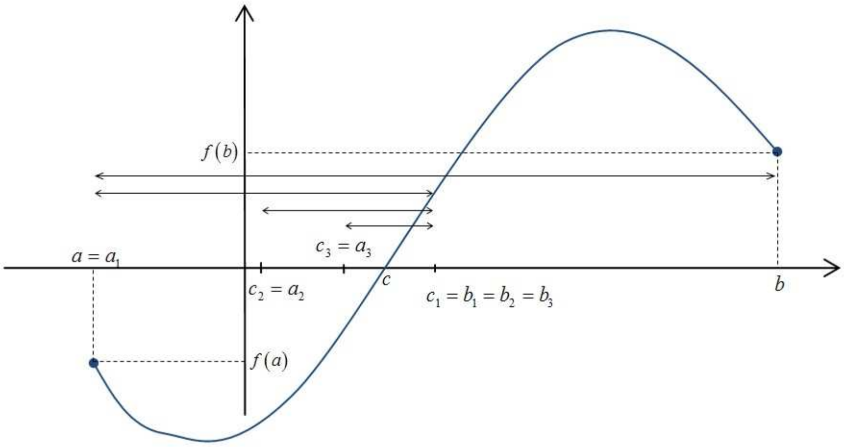
Propiedad de las funciones continuas: Sea $f(x)$ una función continua en el punto $x=x_0$ y tal que $f(x_0)\neq 0$, entonces existe un entorno del punto x_0, $(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$, en el que la función tiene el mismo signo que $f(x_0)$. Es decir, $\exists\delta>0\ /\ f(x)\cdot f(x_0)>0$, $\forall x\in(x_0-\delta,\, x_0+\delta)$.

Demostración del teorema:

Supongamos que $f(a)<0$ y $f(b)>0$ (para $f(a)>0$ y $f(b)<0$, se procedería de igual forma).

Sea c_1 el punto medio de $[a,b]$. Si $f(c_1)=0$, el teorema queda demostrado. Si $f(c_1)\neq 0$, en uno de los intervalos $[a,c_1]$ o $[c_1,b]$, el valor de la función en los extremos tendrá diferente signo. Llamamos $[a_1,b_1]$ a ese intervalo.

Sea c_2 el punto medio de $[a_1,b_1]$. Si $f(c_2)=0$, el teorema queda demostrado. En caso contrario, como antes, en uno de los intervalos $[a_1,c_2]$ o $[c_2,b_1]$, el valor de la función en los extremos tendrá diferente signo. Llamamos $[a_2,b_2]$ a ese intervalo. Tomamos su punto medio, c_3, y razonamos de nuevo del mismo modo.



Continuando con ese proceso pueden ocurrir dos cosas, o bien en alguna etapa uno de los puntos medios, c_m, verifica $f(c_m)=0$, en cuyo caso hemos demostrado el teorema, o bien, hemos construido una sucesión de intervalos cerrados, encajados, $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots$ tales que, en cada uno, el valor de la función en los extremos tiene signos distintos. Como cada intervalo de la sucesión tiene longitud la mitad del anterior, la sucesión de sus longitudes $\dfrac{b-a}{2^n}$ tiende a cero. Ahora, por el Axioma de Cantor, podemos asegurar la existencia de un punto c común a todos ellos.

Si fuese $f(c)>0$, por la propiedad de las funciones continuas, existiría un entorno $(c-\delta, c+\delta)$ donde la función sería siempre positiva. Como dentro de ese entorno hay infinitos intervalos de la sucesión anterior (porque sus longitudes tendían a cero y c está en todos ellos) en cuyos extremos la función cambia de signo, con lo que llegamos a una contradicción; luego, la posibilidad $f(c)>0$ no puede darse.

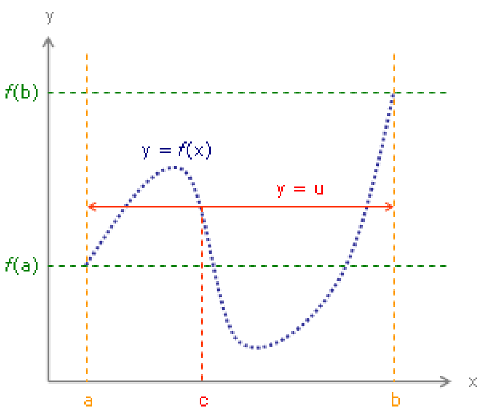
Por la misma razón, tampoco puede ocurrir $f(c)<0$. Por tanto $f(c)=0$, como queríamos demostrar.

Teorema de Darboux, o del valor intermedio:

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y tal que $f(a)\neq f(b)$, entonces la función $f(x)$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, al menos una vez, en el intervalo (a,b).

Demostración:

Queremos probar que para todo u entre $f(a)$ y $f(b)$ existe un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=u$.



Trataremos el caso $f(a) < f(b)$, seguiríamos el mismo razonamiento para $f(a) > f(b)$.

Sea u un número cualquiera comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, $f(a) < u < f(b)$. Consideremos la función $g(x) = f(x) - u$, que es continua en $[a, b]$ por serlo $f(x)$ y que verifica $g(a) = f(a) - u < 0$ y $g(b) = f(b) - u > 0$. Por el teorema de Bolzano, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) = u$, como queríamos demostrar.

Continuidad de las funciones inversas.

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que existe su función inversa f^{-1}, ¿podríamos asegurar la continuidad de f^{-1}? La solución de esta cuestión nos ayudaría a decidir sobre la continuidad de funciones como: $\sqrt[n]{x}$, $arcsen\, x$, $arctg\, x$, ….

Comencemos recordando que las funciones continuas que tienen inversa son las inyectivas, es decir, funciones que cumplen que dos puntos de su dominio no tienen imágenes iguales, o dicho de otra forma:

$f(x)\ es\ inyectiva \Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in Dom\, f,\quad f(x_1) \neq f(x_2);\ \ y\ \ si\ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Veamos ahora un teorema que nos ayudará a decidir si una función continua es inyectiva.

Teorema (de caracterización de las funciones continuas inyectivas):

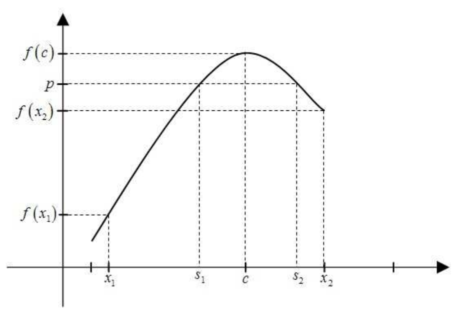
Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces $f(x)$ es inyectiva $\Leftrightarrow$ $f(x)$ es estrictamente monótona (creciente o decreciente).

Demostración:

Si $f(x)$ es estrictamente monótona, para cada pareja de puntos $x_1 < x_2$, se verificará $f(x_1) < f(x_2)$ en el caso de ser monótona creciente, o $f(x_1) > f(x_2)$ en el caso de ser monótona decreciente, y, por lo tanto, la función $f(x)$ es inyectiva.

Recíprocamente, si $f(x)$ es inyectiva en $[a, b]$, y $x_1 < x_2$ son dos puntos cualesquiera de $[a, b]$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, y, por lo tanto, $f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$. Supongamos, por concretar, que $f(x_1) < f(x_2)$; de igual modo se haría si fuese $f(x_1) > f(x_2)$.

Sea c un punto intermedio entre x_1 y x_2, $x_1 < c < x_2$. Si su imagen, $f(c)$, verificara la condición $f(x_1) < f(x_2) < f(c)$, cualquier valor p, $f(x_2) < p < f(c)$ tendría, al menos, dos antiimágenes $s_1 \in (x_1, c)$ y $s_2 \in (c, x_2)$ (por el teorema del valor intermedio de Darboux) lo cual no es posible porque $f(x)$ es inyectiva. Por lo tanto esa condición no puede verificarse.



Por la misma razón, $f(c)$ no puede verificar $f(c) < f(x_1) < f(x_2)$. En consecuencia, debe suceder que $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$ y, por tanto, f es estrictamente monótona (creciente en este caso concreto).

Teorema (continuidad de la función inversa):

Sea f una función continua e inyectiva en un intervalo cerrado $[a,b]$. Entonces, su función inversa, f^{-1}, es también continua en el conjunto imagen de f.

Demostración:

Al ser f una función continua e inyectiva, por el teorema anterior, es estrictamente monótona. Supongamos, para concretar, que f es creciente, entonces, la función inversa, f^{-1}, es biunívoca entre $[f(a), f(b)]$ y $[a,b]$. Sea p un punto cualquiera entre $f(a)$ y $f(b)$, y sea $c = f^{-1}(p)$. A cualquier entorno de c, $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, le corresponde biunívocamente por f un intervalo $(p-\delta', p+\delta'')$. Tomando $\delta = mín(\delta', \delta'')$, el entorno $(p-\delta, p+\delta)$ ya verifica la condición requerida para la continuidad: si $y_0 \in (p-\delta, p+\delta) \Rightarrow f^{-1}(y_0) \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$.

Con una adecuada modificación, el razonamiento prueba también que f^{-1} es continua por la derecha en $f(a)$ y por la izquierda en $f(b)$.

Teorema:

Sea f una función estrictamente monótona en un intervalo cerrado $[a,b]$ y biunívoca con $[f(a), f(b)]$, si es creciente, o con $[f(b), f(a)]$, si es decreciente. Entonces, tanto f como su inversa, f^{-1}, son funciones continuas.

Demostración:

Analizaremos sólo el caso en que f sea estrictamente creciente.

Veamos que f es continua. Sea $c \in (a,b)$, como f es biunívoca y creciente, a cualquier entorno $(f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$ le corresponde por f^{-1} un intervalo $(c-\delta', c+\delta'')$. Tomando $\delta = mín(\delta', \delta'')$, el entorno $(c-\delta, c+\delta)$ ya verifica la condición requerida para la continuidad: si $x_0 \in (c-\delta, c+\delta) \Rightarrow f(x_0) \in (f(c)-\varepsilon, f(c)+\varepsilon)$. De forma similar se demuestra la continuidad por la derecha en a y por la izquierda en b.

Y, ahora, la continuidad de f^{-1} se deduce del teorema anterior.

Acotación de funciones:

Definición:

Sea f una función definida en un conjunto A.

–Se dice que f está acotada superiormente en A cuando existe un número s tal que $f(x) \le s$, $\forall x \in A$. Esto equivale a decir que el conjunto imagen de f, como conjunto numérico, está acotado superiormente y que s es una cota superior. A la menor de las cotas superiores se la llama supremo de f y se denota por $\sup(f)$.

–Se dice que f está acotada inferiormente en A cuando existe un número i tal que $i \leq f(x)$, $\forall x \in A$. Esto equivale a decir que el conjunto imagen de f, como conjunto numérico, está acotado inferiormente y que i es una cota inferior. A la mayor de las cotas inferiores se la llama ínfimo de f y se denota por $\inf(f)$.

–Entonces, f está acotada en A cuando existe un número s tal que $|f(x)| \leq s$, $\forall x \in A$. Esto equivale a decir que f está acotada superior e inferiormente.

Teorema de acotación:

Si f es continua en $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$.

Demostración:

Vamos a utilizar un razonamiento análogo al que usamos para la demostración del teorema de Bolzano.

Supongamos que f no está acotada en $[a,b]$. Sea c_1 el punto medio de $[a,b]$, en uno de los intervalos $[a,c_1]$ o $[c_1,b]$ la función no está acotada (pues, en caso contrario, lo estaría en el total).

Llamamos $[a_1,b_1]$ a ese intervalo. Sea c_2 el punto medio de $[a_1,b_1]$, en uno de los intervalos $[a_1,c_2]$ o $[c_2,b_1]$ la función no está acotada. Llamamos $[a_2,b_2]$ a ese intervalo. Tomamos su punto medio, c_3, y razonamos de nuevo del mismo modo.

Continuando con ese proceso obtenemos una sucesión de intervalos cerrados, encajados, $[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset [a_3,b_3] \supset \cdots$ tales que, en cada uno, f no está acotada. Como cada intervalo de la sucesión tiene longitud la mitad del anterior, la sucesión de sus longitudes $\dfrac{b-a}{2^n}$ tiende a cero. Ahora, por el Axioma de Cantor, podemos asegurar la existencia de un punto c común a todos ellos.

Por la 2ª Propiedad de las funciones continuas: *" Sea $f(x)$ una función continua en el punto $x = x_0$, entonces existe un entorno del punto x_0, $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$, en el que la función está acotada"*, existiría un entorno $(c-\delta,\ c+\delta)$ donde la función está acotada. Como dentro de ese entorno hay infinitos intervalos de la sucesión anterior (porque sus longitudes tendían a cero y c está en todos ellos) en los que la función no estaba acotada, llegamos a una contradicción, que surge de suponer que f no está acotada en $[a,b]$.

Por tanto, f está acotada en $[a,b]$, como queríamos demostrar.

Definición:

Sea f una función definida en un conjunto A.

–Si existe un punto c tal que $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in A$, al valor $f(c)$ lo llamamos (valor) máximo absoluto de f en A, y decimos que f alcanza su máximo absoluto en el punto c. El máximo absoluto de f en A, es el máximo del conjunto imagen (como conjunto de números).

–Si existe un punto c' tal que $f(c') \leq f(x)$ $\forall x \in A$, al valor $f(c')$ lo llamamos (valor) mínimo absoluto de f en A, y decimos que f alcanza su mínimo absoluto en el punto c'. El mínimo absoluto de f en A, es el mínimo del conjunto imagen (como conjunto de números).

Teorema del máximo de Weierstrass:

Toda función f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanza su máximo y su mínimo absolutos en puntos c y c', respectivamente, de dicho intervalo.

Demostración:

Por ser f continua en $[a,b]$, el teorema anterior asegura su acotación y por tanto la existencia del supremo y del ínfimo de f. Sea $M = \sup(f)$ y supongamos que f no alcanza su máximo absoluto, es decir, que no hay ningún punto $x \in [a,b]$ tal que $M = f(x)$.

Entonces, la función $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ es continua, ya que el denominador no se anula, y además es estrictamente positiva en $[a,b]$, puesto que será $M > f(x)$. Por el teorema de acotación, $g(x)$ está acotada superiormente $\Rightarrow\ 0 < \dfrac{1}{M - f(x)} < S$, de donde se deduce que $f(x) < M - \dfrac{1}{S} \quad \forall x \in [a,b]$.

Llegamos a una contradicción puesto que tendríamos una cota superior de f en $[a,b]$ menor que el supremo. Concluimos que la suposición es falsa y existe, al menos, un punto c tal que $f(c) = M$, es decir, donde f alcanza su máximo absoluto.

Del mismo modo se razona para el mínimo absoluto.