UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (LOE)
EXAMEN MODELOCURSO 2015-2016
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

INSTRUCCIONES: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cinco ejercicios de los que consta la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.
CALIFICACIÓN: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.
TIEMPO: Una hora y treinta minutos.

OPCIÓN A

Problema 1.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

a) Determínese para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible A.
b) Resuélvase para $a = 0$ el sistema

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución.

a. La condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{vmatrix} = 0 - 24 + a^2 - (0 - 18a + 8a) = a^2 + 10a - 24 = 0 : \begin{cases} a = -12 \\ a = 2 \end{cases}$$

Para $a \neq -12, 2$; $|A| \neq 0$ y por lo tanto la matriz A tiene inversa.

b. $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 8z = 0 \\ -x - 6z = 0 \end{cases}$

Sistema homogéneo

$$(A = A^*) \Rightarrow \text{rg } A = \text{rg } A^* \text{ Sistema compatible} : \begin{cases} |A| \neq 0 \text{ Determinado. Solución trivial } (x = y = z = 0) \\ |A| = 0 \text{ Indeterminado. Infinitas soluciones} \end{cases}$$

Para $a = 0$, $|A| \neq 0$, por lo tanto sistema compatible determinado, siendo su única solución la trivial.

$$x = 0;\ y = 0;\ z = 0$$

Problema 2.- (Calificación máxima: 2 puntos)

Determínese la matriz X que verifica $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$

Solución.

Se despeja la matriz X:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

En el primer miembro se saca factor común de la matriz X por la derecha:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right]\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se suman las matrices del corchete

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se despeja la matriz X multiplicando los dos miembros de la ecuación por la inversa de $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y por la derecha (tener en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que se debe multiplicar por la misma matriz los dos miembros y en el mismo orden).

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad, y que la matriz identidad es el elemento neutro del producto de matrices:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{I}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\qquad I\cdot X=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\qquad X=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la inversa: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}\cdot\left(\mathrm{adj}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)^t=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Resolviendo:

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 0+(-1)\cdot 4 \\ -3\cdot 2+4\cdot 1 & -3\cdot 0+4\cdot 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$$

Problema 3.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real:

$$f(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$$

a) Estúdiense y determínense sus asíntotas.
b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución.

a. **Asíntotas verticales:** Son rectas de la forma x = a, donde "a" es un número que no pertenece al dominio y en el que se cumple que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dfrac{k}{0}$

$$D[f(x)]=\{x\in R / 1-x^2\neq 0 : x\neq\pm 1\}=R-\{\pm 1\}$$

- $x=-1$: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\dfrac{-1}{0}\Rightarrow x=-1$ es una asíntota vertical: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$

- $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow x=1$ es una asíntota vertical: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{1-x^2}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\end{cases}$

Asíntotas horizontales: Son rectas de la forma y = L, donde $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)\in R$

- $L=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{1-x^2}\overset{(\infty/\infty)}{\approx}\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x)=\mp\infty\Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales

Asíntota oblicua. Son rectas de la forma y = mx + n, donde:

- $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x-x^3} \overset{(\infty/\infty)}{\approx} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{-x^3} = -1$$
- $$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}-(-1)x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2} \overset{(\infty/\infty)}{\approx} \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2} =$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Asíntota oblicua: $y = -x$

b. La monotonía de la función se asocia al signo de la primera derivada, en los intervalos donde la derivada sea positiva, la función es creciente, en los intervalos donde la derivada es negativa la función es decreciente.

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} \qquad f'(x) = \frac{(x^3)' \cdot (1-x^2) - (x^3)\cdot(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2\cdot(1-x^2)-(x^3)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

Agrupando y ordenando la derivada:

$$f'(x) = \frac{3x^2-3x^4+2x^4}{(1-x^2)^2} = \frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2}$$

El estudio del signo de la derivada se hace a partir de los ceros y los polos de la derivada.

Ceros (valores de x que anulan la derivada, son los ceros del numerador).

$$3x^2 - x^4 = 0 : x^2\cdot(3-x^2) = 0 : \begin{cases} x^2 = 0 : x = 0 \\ 3-x^2 = 0 : x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Polos (valores de x que hacen infinita la derivada, son los ceros del denominador)

$$(1-x^2)^2 = 0 : 1-x^2 = 0 : x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

Los ceros y los polos se representan sobre una recta Real y se estudia el signo de la derivada dando un valor de cada intervalo a la derivada y calculando su signo.

$$f'(x) = \frac{x^2\cdot(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
-2		-1,1		-0,1		0,1		1,1		2
$\frac{-}{+} = -$		$\frac{+}{+} = +$		$\frac{+}{+} = +$		$\frac{+}{+} = +$		$\frac{+}{+} = +$		$\frac{-}{+} = -$
$y' < 0$	0	$y' > 0$	$\nexists$	$y' > 0$	0	$y' > 0$	$\nexists$	$y' > 0$	0	$y' < 0$
DECREC		CREC		CREC		CREC		CREC		DECREC

- $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente
- $(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\sqrt{3})$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente

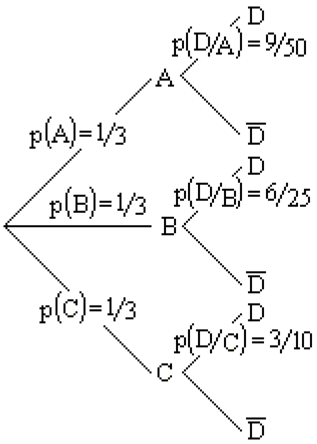
Problema 4.- (Calificación máxima: 2 puntos)

En un polígono industrial se almacenan 30000 latas de refresco procedentes de las fábricas A, B y C a partes iguales. Se sabe que en 2016 caducan 1800 latas de la fábrica A, 2400 procedentes de la B y 3000 que proceden de la fábrica C.

a) Calcúlese la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2016.

b) Se ha elegido una lata de refresco aleatoriamente y caduca en 2016, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la fábrica A?

Solución.



Sucesos y datos: A ≡ Lata procedente de la fábrica A. $p(A)=\dfrac{1}{3}$

B ≡ Lata procedente de la fábrica B. $p(B)=\dfrac{1}{3}$

C ≡ Lata procedente de la fábrica C. $p(C)=\dfrac{1}{3}$

D ≡ Lata que caduca en 2016. $\begin{cases} p(D/A)=\dfrac{1800}{10000}=\dfrac{9}{50} \\ p(D/A)=\dfrac{2400}{10000}=\dfrac{6}{25} \\ p(D/A)=\dfrac{3000}{10000}=\dfrac{3}{10} \end{cases}$

a.
$$p(D)=p((A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D))=p(A\cap D)+p(B\cap D)+p(C\cap D)=$$
$$=p(A)\cdot p(D/A)+p(B)\cdot p(D/B)+p(C)\cdot p(D/C)=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{50}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{25}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{25}$$
$$p(D)=24\%$$

b.
$$p(A/D)=\frac{p(A\cap D)}{p(D)}=\frac{p(A)\cdot p(D/A)}{p(D)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{50}}{\frac{6}{25}}=\frac{1}{4}$$
$$p(A/D)=25\%$$

El problema también se puede resolver expresando los datos en un cuadro.

	A	**B**	**C**	
CADUCA	1800	2400	3000	7200
NO CADUCA	8200	7600	7000	22800
	10000	10000	10000	30000

a.
$$p(\text{CADUCAR})=\frac{\text{nº de latas que caducan}}{\text{nº de latas totales}}=\frac{7200}{30000}=\frac{6}{25}$$
$$p(D)=24\%$$

b.
$$p(\text{Sea de la fabrica A/Ha Caducado})=\frac{\text{nº de latas de la frabrica A que han caducado}}{\text{nº de latas que han caducado}}=\frac{1800}{7200}=\frac{1}{4}$$
$$p(\text{Sea de la fabrica A/Ha Caducado})=25\%$$

Problema 5.- (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo diario que los adultos de una determinada ciudad dedican a actividades deportivas, expresado en minutos, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 20$ minutos.

a) Para una muestra aleatoria simple de 250 habitantes de esa ciudad se ha obtenido un tiempo medio de dedicación a actividades deportivas de 90 minutos diarios. Calcúlese un intervalo de confianza al 90% para μ.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe de tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral sea menor que 1 minuto con el mismo nivel de confianza del 90%?

Solución.

a. $x \equiv$ Tiempo diario dedicado a actividades deportivas en minutos. Variable continua con distribución Normal $x : N(\mu, \sigma)$.

Para muestras de tamaño 250, la distribución de medias muestrales de la variable x también siguen una distribución Normal

$$\bar{x} : N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{250}}\right)$$

El intervalo de confianza para la media poblacional a partir de una media muestral viene dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

El valor critico $\left(z_{\alpha/2}\right)$de la estimación se calcula a partir del nivel de confianza ($1 - \alpha = 0{,}90$)

$$z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}10}{2}\right) = \varphi^{-1}(0{,}9500) = 1{,}645$$

$$\left(90 - 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}}, 90 + 1{,}645 \cdot \frac{20}{\sqrt{250}}\right) \approx (87{,}9;\ 92{,}1)$$

Con un nivel de confianza del 90% se puede estimar que la media de tiempo diario dedicado por los adultos de la ciudad, va a estar comprendido entre 87,9 y 92,1 minutos.

b. El tamaño muestral se relaciona con el error máximo mediante la ecuación:

$$\varepsilon_{\text{máx}} > z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad n > \left(z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\varepsilon_{\text{máx}}}\right)^2$$

$$n > \left(1{,}645 \cdot \frac{20}{1}\right)^2 = 1082{,}4 \Rightarrow n \geq 1083 \text{ elementos}$$

OPCIÓN B

Problema 1.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 3z = 3 \\ 3x + ay - 2z = 5 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema para los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema en el caso a = 2.

Solución.
a. El sistema viene definido por las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & a & -2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & a & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A \subset A^* \Rightarrow \text{rg } A \le \text{rg } A^* \le n = 3$$

Si el $|A| \ne 0$, el $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n$, sistema compatible determinado, por lo tanto, el tipo de solución del sistema se discute para los valores del parámetro que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & a & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 - 2a - (-6 - 4 - 3a) = a - 3 \qquad |A| = 0 \Rightarrow a - 3 = 0 : a = 3$$

Discusión:

i. Si $a \ne 3$, $|A| \ne 0$, el $\text{rg } A = 3 = \text{rg } A^* = n$, sistema compatible determinado

ii. Si $a = 3$, $|A| = 0$, $\text{rg } A < 3$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 - (-2) = -1 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A = 2$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ De los menores orlados a $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ solo queda por estudiar el formado por la 1ª, 3ª y 4ª columna. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -3 \ne 0 \Rightarrow \text{rg } A^* = 3 \ne \text{rg } A$ Sistema incompatible.

b. Para a = 2. Sistema compatible determinado. La solución se puede calcular por el método de Cramer o de Gauss.

Método de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} ; \; y = \frac{|A_y|}{|A|} ; \; z = \frac{|A_z|}{|A|} \qquad |A| = a - 3 \overset{a=2}{=} 2 - 3 = -1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3 ; \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3}{-1} = -3 ; \; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(3, -3, -1)$$

Método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 2 & -3 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & -2 & \vdots & 5 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} E_2 = E_2 - 2E_1 \\ E_3 = E_3 - 3E_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -z = 1 \\ -y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{z=-1} \begin{cases} x + y = 0 \\ -y = 3 \end{cases}$$

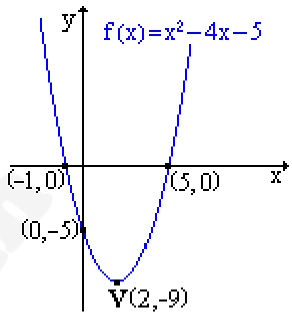
$x = 3;\ y = -3;\ z = -1 \qquad (3, -3, -1)$

Problema 2.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

a) Represéntese gráficamente la función f.
b) Calcúlese el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de f y el eje de abscisas.

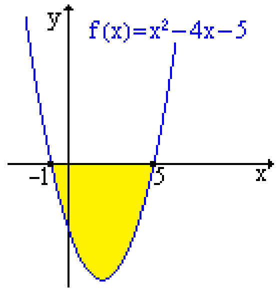
Solución.



a. Parábola: Vértice $x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2$; $y_v = f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 - 5 = -9$. $V(2,-9)$

Cortes con los ejes: $OX(y=0)$: $x^2 - 4x - 5 = 0 : \begin{cases} x = -1 & (-1,0) \\ x = 5 & (5,0) \end{cases}$

$OY(x=0)$: $(0,c) = (0,-5)$



b. $$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{5}\left(x^2 - 4x - 5\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x\right]_{-1}^{5}\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x\right]_{-1}^{5}\right|$$

$$\text{Área} = \left|\left(\frac{5^3}{3} - 2\cdot 5^2 - 5\cdot 5\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2\cdot(-1)^2 - 5\cdot(-1)\right)\right| = |-36| = 36\,u^2$$

Problema 3.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Dada la función real de variable real

$$f(x) = x^2 \cdot e^{x^2}$$

a) Calcúlese su función derivada.
b) Determínense sus intervalos de concavidad ($\cap$) y convexidad ($\cup$).

Solución.

a. $f'(x) = 2x\cdot e^{x^2} + x^2\cdot e^{x^2}\cdot 2x = \left(2x + 2x^3\right)\cdot e^{x^2}$

b. Los intervalos de curvatura de una función se asocian al signo de la segunda derivada.

- Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ es cóncava $(\cap)$
- Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ es convexa $(\cup)$

$$f''(x) = \left(2 + 6x^2\right)\cdot e^{x^2} + \left(2x + 2x^3\right)\cdot e^{x^2}\cdot 2x = e^{x^2}\left(2 + 10x^2 + 4x^4\right)$$

- $e^{x^2} > 0\ \forall\, x \in R$. Por definición, la exponencial siempre es positiva

- $2 + 10x^2 + 4x^4 = 0 \xrightarrow{x^2 = \frac{-10\pm\sqrt{10^2 - 4\cdot 4\cdot 2}}{2\cdot 4}} \begin{cases} x_1^2 < 0 \\ x_2^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ La cuación no tiene soluciones reales .

$f''(x) > 0\ \forall\, x \in R$, f(x) es convexa $(\cup)$ en todo su dominio (R).

Problema 4.- (Calificación máxima: 2 puntos)
Las probabilidades de que cinco jugadores de baloncesto encesten un lanzamiento de tiro libre son, respectivamente, de 0,8; 0,9; 0,7; 0,9; 0,93. Si cada jugador lanza un tiro libre siguiendo el orden anterior y considerando los resultados de los lanzamientos como sucesos independientes, calcúlese la probabilidad de que:

a) Todos los jugadores encesten su tiro libre.
b) Al menos uno de los tres primeros jugadores enceste.

Solución.
a. Si se denomina como A_i al suceso el jugador que lanza en la posición i encesta su tiro:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \overset{\text{INDEPENDIENTES}}{=} p(A_1)\cdot p(A_2)\cdot p(A_3)\cdot p(A_4)\cdot p(A_5)$$
$$p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9\cdot 0{,}93 = 0{,}4218 = 42{,}18\%$$

b. Es el caso contrario a que ninguno de los tres primero enceste.

$$p\left(\overline{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1}\right)\cdot p\left(\overline{A_2}\right)\cdot\left(\overline{A_3}\right) =$$
$$= 1 - (1 - p(A_1))\cdot(1 - p(A_2))\cdot(1 - p(A_2)) = 1 - (1 - 0{,}8)\cdot(1 - 0{,}9)\cdot(1 - 0{,}7) = 0{,}994 = 99{,}4\%$$

Problema 5.- (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio (en euros) del metro cuadrado de las viviendas de un determinado municipio se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 650$ euros.

a) Se toma una muestra aleatoria simple y se obtiene un intervalo de confianza (2265, 375; 2424, 625) para μ, con un nivel de confianza del 95%. Calcúlese la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) Tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 225. Calcúlese el error máximo cometido en la estimación de μ por la media muestral con un nivel de confianza del 99%.

Solución.
a. La media de la muestra es la media aritmética de los extremos del intervalo.

$$\overline{x} = \frac{2265{,}375 + 2424{,}625}{2} = 2345$$

El tamaño de la muestra se puede obtener el error máximo admitido:

$$\left(\varepsilon = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2\right)$$

El error máximo admitido se calcula como la mitad de la amplitud del intervalo.

$$\text{Amplitud de intervalo} = 2424{,}625 - 2265{,}375 = 159{,}25 \Rightarrow \varepsilon = \frac{159{,}25}{2} = 79{,}625$$

El valor de $z_{\alpha/2}$ se obtiene del nivel de confianza:

$$\left.\begin{array}{r} z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = \text{Nivel de confianza} = 0{,}95 \end{array}\right\} : z_{\alpha/2} = \phi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}05}{2}\right) = 1{,}96$$

Sustituyendo los valores en la expresión, se calcula el tamaño de la muestra.

$$n = \left(1{,}96\cdot\frac{650}{79{,}625}\right)^2 = 256 \text{ elementos}$$

b. $$\varepsilon = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} : \quad \left.\begin{array}{r} z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \\ 1 - \alpha = \text{Nivel de confianza} = 0{,}99 \end{array}\right\} : z_{\alpha/2} = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{0{,}01}{2}\right) = 2{,}575$$

$$\varepsilon = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}575\cdot\frac{650}{\sqrt{225}} = 111{,}583$$