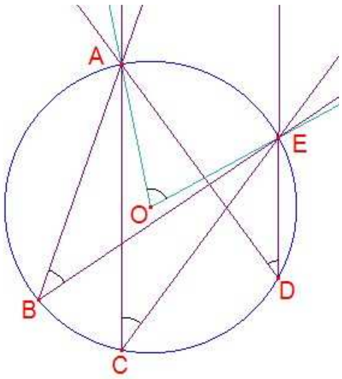
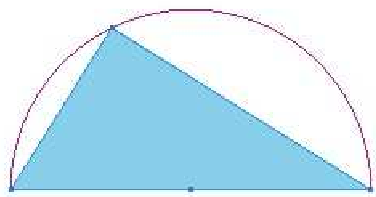
GEOMETRÍA

Ángulos

<u>En la circunferencia</u>:

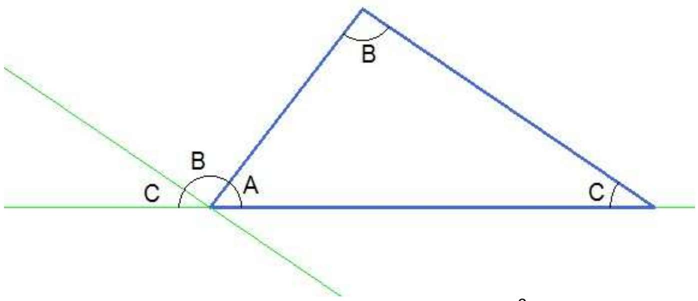


$A\hat{B}E$, $A\hat{C}E$ o $A\hat{D}E$ son ángulos inscritos en la circunferencia y son todos iguales. $A\hat{O}E$ es el ángulo central correspondiente y su medida es dos veces la medida de los ángulos inscritos.

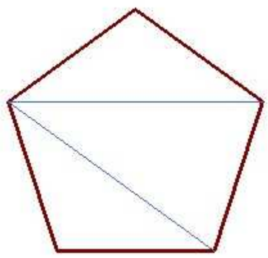


Basándonos en lo anterior, todo triángulo inscrito en una semicircunferencia, como en la figura, es rectángulo.

<u>En los polígonos</u>:



Los tres ángulos de un triángulo suman 180^0



En un polígono convexo de n lados, trazando las diagonales (segmentos que unen dos vértices no consecutivos) obtenemos $(n-2)$ triángulos. Por tanto la suma de los ángulos interiores del polígono será $(n-2)\cdot 180^o$.

Semejanza

Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma.

En dos figuras semejantes:

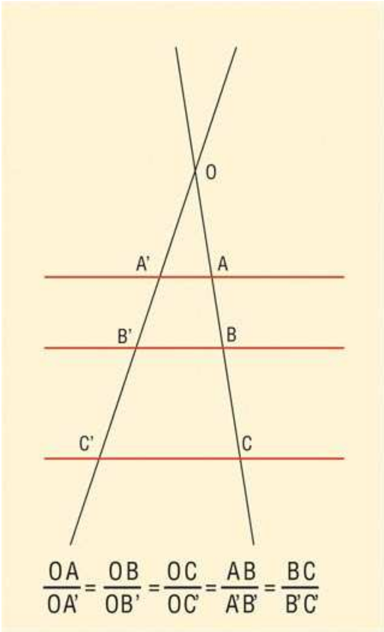
- Los ángulos correspondientes son todos iguales.
- Los segmentos correspondientes son proporcionales y la razón la llamamos de semejanza.

La escala de un plano, mapa, etc. es la razón de semejanza, es decir el cociente entre cada segmento del plano y su correspondiente en la realidad. Una escala 1:50 expresa que una unidad de medida en el plano son 50 unidades de medida en la realidad.

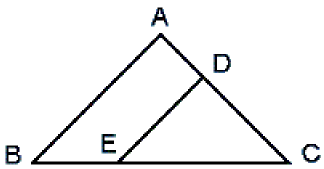
Semejanza de triángulos:

Dos triángulos semejantes tienen ángulos iguales y lados proporcionales. "*Para que dos triángulos sean semejantes basta con que tengan dos ángulos iguales*".

Teorema de Thales



En el diagrama inferior el triángulo DEC es semejante al triángulo ABC. Esto significa que los siguientes pares de ángulos son iguales: BAC = EDC; ABC = DEC; los ángulos ACB y DCE miden lo mismo.

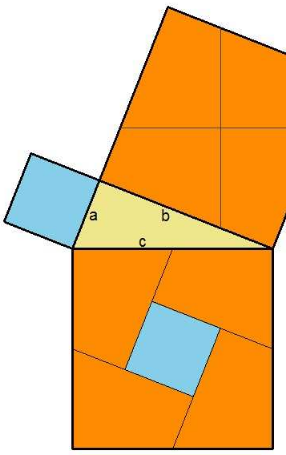


Los dos triángulos están en posición de thales y se cumplen las siguientes relaciones de proporcionalidad:

$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{EC}$$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DC} \quad ; \quad \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EC} \quad ; \quad \frac{AC}{BC}=\frac{DC}{EC}$$

Teorema de Pitágoras



Teorema de Pitágoras

Demostración de Perigal

El teorema de Pitágoras nos dice que el área del cuadrado que podemos construir sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construídos sobre los catetos. Es decir:

$$Un\ triángulo\ de\ lados\ \ a, b\ \ y\ \ c\ \ es\ rectángulo \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

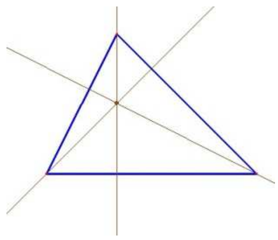
$$Si\quad c^2 < a^2 + b^2 \Rightarrow el\ triángulo\ es\ acutángulo$$
$$Si\quad c^2 > a^2 + b^2 \Rightarrow el\ triángulo\ es\ obtusángulo$$

Lugares geométricos

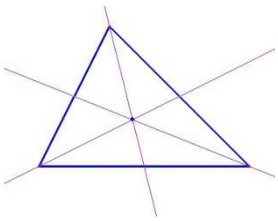
Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una misma condición. Ejemplos conocidos:

- Recta: El conjunto de puntos alineados con dos puntos dados.
- Mediatriz de un segmento: Conjunto de los puntos que equidistan de los extremos del segmento
- Bisectriz de un ángulo: Conjunto de los puntos que equidistan de los lados del ángulo.
- Circunferencia: Conjunto de puntos que equidistan de uno fijo, llamado centro.
- Elipse: Conjunto de puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

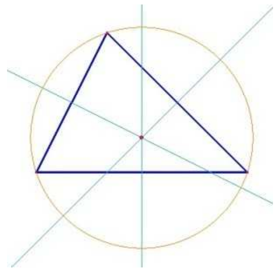
Puntos y rectas notables en un triángulo:



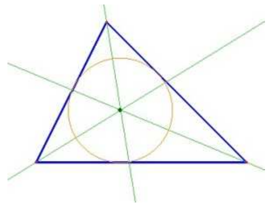
Las alturas de un triángulo se cortan en el ortocentro.



Las medianas de un triángulo se cortan en el baricentro.



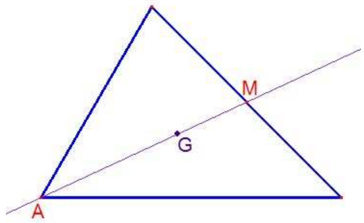
Las mediatrices de un triángulo se cortan en el circuncentro.



Las bisectrices de un triángulo se cortan en el incentro.

- Las alturas son rectas que pasan por un vértice del triángulo y son perpendiculares al lado opuesto. Si el triángulo es acutángulo, el ortocentro es interior al triángulo. Si es obtusángulo, el ortocentro es exterior y si es rectángulo, el ortocentro está en el vértice del ángulo recto.
- Las medianas son rectas que pasan por un vértice del triángulo y por el punto medio del lado opuesto. Las medianas dividen un triángulo en seis triángulos de igual área. El baricentro es el centro de gravedad del triángulo y tiene la propiedad de dividir proporcionalmente el segmento de mediana, es decir:

$$\frac{AG}{GM} = 2 \quad o \quad AG = 2GM \;\Rightarrow \begin{cases} AG = \dfrac{2}{3}AM \\ GM = \dfrac{1}{3}AM \end{cases}$$



- Las mediatrices son rectas perpendiculares a los lados del triángulo por su punto medio. El circuncentro, al pertenecer a las tres mediatrices, tiene igual distancia a los tres vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Si el triángulo es acutángulo, es interior. Si es obtusángulo, es exterior y si el triángulo es rectángulo, está en el punto medio de la hipotenusa.
- Las bisectrices dividen en dos partes iguales cada ángulo. El incentro, al pertenecer a las tres bisectrices, tiene igual distancia a los tres lados del triángulo por lo que es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.
- Si el triángulo es equilátero, coinciden alturas, medianas, mediatrices y bisectrices, por tanto, ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro son el mismo punto.
- Si el triángulo es isósceles, la altura que pasa por el vértice del ángulo desigual coincide con la mediana, la mediatriz y la bisectriz y los cuatro puntos notables están alineados en esa recta. En cualquier triángulo, el ortocentro, el baricentro y el circuncentro están alineados y la recta que los une se llama recta de Euler.

Áreas y longitudes en las figuras planas

Para el cálculo de longitudes en los polígonos debemos tener siempre presente el teorema de Pitágoras y posibles relaciones de semejanza de triángulos.

Para el cálculo de áreas es aconsejable descomponer la figura, si es posible, en regiones básicas: triángulos, rectángulos, círculos o sectores circulares. También hay que analizar la posibilidad de obtener el área como diferencia de áreas de figuras conocidas.

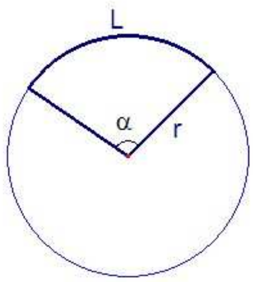
En los polígonos, además de las áreas básicas (triángulo y rectángulo), en algún momento puede ser de utilidad obtener el área del rombo como la mitad del producto de sus diagonales $A_{rombo} = \frac{d \cdot d'}{2}$.

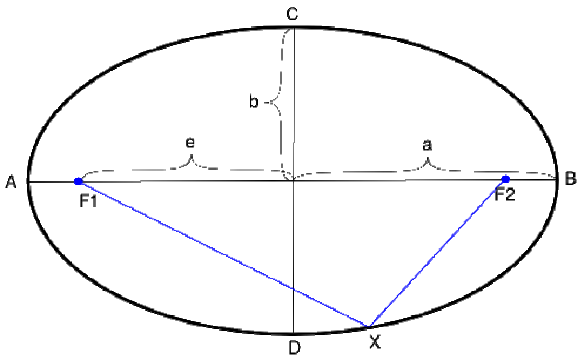
Hay que recordar que en los paralelogramos las diagonales se cortan en el punto medio y si el paralelogramo es un rombo, son perpendiculares, con lo que la fórmula anterior es fácilmente deducible.

En un sector circular, el área, ángulo y longitud de arco son proporcionales a los del círculo y circunferencia con el mismo radio. Es decir:

$$\frac{A_{sector}}{A_{círculo}} = \frac{L_{arco}}{L_{circunferencia}} = \frac{áng_{sector}}{360^0}$$

$$\frac{A_{sector}}{\pi r^2} = \frac{L}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360}$$





En la elipse la suma de las distancias desde cualquier punto X a los focos F_1 y F_2 es constante e igual a 2a.

El área que encierra se calcula de forma similar al círculo $A_{elipse} = \pi ab$

Cuerpos geométricos

Entendemos por cuerpos geométricos a las figuras tridimensionales. En éstas podemos calcular tanto superficies exteriores como volúmenes.

<u>Poliedros:</u>

Tienen caras, aristas y vértices. Sus caras son polígonos, la unión de dos caras forma una arista y en cada vértice concurren tres o más aristas.

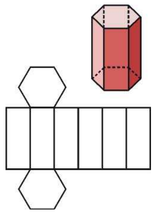
Todos los poliedros cumplen la relación de Euler: Caras + vértices = aristas + 2

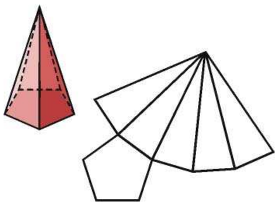
Hay 5 poliedros regulares (sus caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice concurre el mismo número de caras)

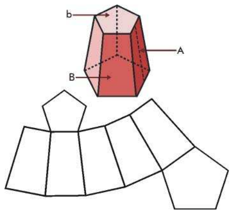
	tetraedro	hexaedro	octaedro	dodecaedro	icosaedro
caras	4	6	8	12	20
vértices	4	8	6	20	12
aristas	6	12	12	30	30

Otros poliedros importantes son los prismas, las pirámides y los troncos de pirámide.

La superficie exterior se calcula como suma de las áreas de los polígonos que forman las caras.

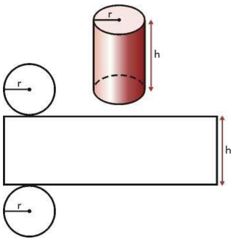


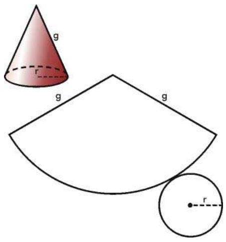


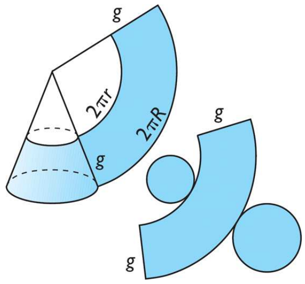


Como <u>cuerpos de revolución</u> nombramos aquellos que se obtienen al girar una recta (generatriz) sobre un eje, los clasificamos en cilindros, conos y troncos de cono.

La superficie exterior se calcula desplegando la figura, que en el caso del cilindro está formada por un rectángulo y dos círculos y en el cono por un sector circular y un círculo. El tronco de cono se descompone en dos círculos y un sector de corona circular.







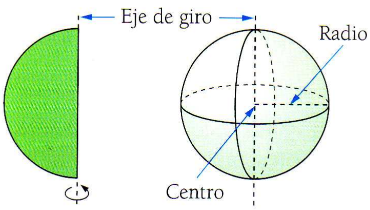
Para la medida del volumen podemos considerar las siguientes fórmulas:

Prismas y cilindros: $V = A_{base} \cdot altura$

Pirámides y conos: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot altura$

Troncos de pirámide y cono: diferencia de volúmenes.

La esfera se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.



Superficie	Volumen
$S_{esfera} = 4\pi r^2$	$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$